Studia graeco-arabica

11/1

2021

Submissions
Submissions are invited in every area of the studies on the trasmission of philosophical and scientific texts from Classical Antiquity to the Middle Ages, Renaissance, and early modern times. Papers in English, French, German, Italian, and Spanish are published. Prospective authors are invited to check the *Guidelines* on the website of the journal, and to address their proposals to the Editor in Chief.

Peer Review Criteria
Studia graeco-arabica follows a double-blind peer review process. Authors should avoid putting their names in headers or footers or refer to themselves in the body or notes of the article; the title and abstract alone should appear on the first page of the submitted article. All submitted articles are read by the editorial staff. Manuscripts judged to be of potential interest to our readership are sent for formal review to at least one reviewer. *Studia graeco-arabica* does not release referees' identities to authors or to other reviewers. The journal is committed to rapid editorial decisions.

Subscription orders
Information on subscription rates for the print edition of Volume 11/1 and 11/2 (2021), claims and customer service: press@unipi.it.

Web site: http://learningroads.cfs.unipi.it/sga
Service Provider: Università di Pisa, ICT - Servizi di Rete Ateneo

ISSN 2281-2687 / ISSN 2239-012X (Online)
ISBN 978-88-3339-614-9 / ISBN 978-88-3339-615-6 (Online)
Registration at the law court of Pisa, 18/12, November 23, 2012.
Editor in Chief: Cristina D'Ancona (cristina.dancona@unipi.it)
Mailing address: Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere, via Pasquale Paoli 15, 56126 Pisa, Italia.

Italian Scientific Journals Ranking: A (ANVUR, Classe A)
Indexing and Abstracting; ERIH PLUS (SCH ESF); Index Islamicus (Brill Bibliographies); Scopus (Elsevier)

Università di Pisa
Piazza Torricelli 4 - 56126 Pisa
P. IVA 00286820501 · Codice Fiscale 80003670504
Tel.+39 050 2212056 · Fax +39 050 2212945
E-mail press@unipi.it · PEC cidic@pec.unipi.it
www.pisauniversitypress.it

Studia graeco-arabica. Vol. 1 (2011)- . - Pisa : Pacini editore, 2011- . – Annuale. Dal 2021: Pisa : Pisa university press.

180.05 (23.)
1. Filosofia araba - Periodici 2. Filosofia greca - Periodici

CIP a cura del Sistema bibliotecario dell'Università di Pisa

Cover
Mašhad, Kitābḫāna-i Āsitān-i Quds-i Raḍawī 300, f. 1v; Paris, Bibliothèque nationale de France, *grec* 1853, f. 186v

Il quinto postulato di Euclide *nel* Commento *di Proclo al primo libro degli* Elementi

Lorenzo Salerno*

Abstract
This article analyses the role of Euclid's fifth postulate (also known as the "Parallel Postulate") in Proclus' *Commentary* on the first book of the *Elements*. Since Euclid included it among the postulates, he considered it indemonstrable; other ancient geometricians, though, disagreed with him and tried to find a proof of this fundamental principle. Proclus also thought so: in his *Commentary*, he reports various opinions on the postulate, together with Ptolemy's attempt at proof, which he refutes, a paradoxical opinion of anonymous authors who even deny the fifth postulate, and his own attempt at proof. The analysis of these attempts at proof was made by Heath; the aim of this paper is to extend the study to all the parts of Proclus' *Commentary* relating to the fifth postulate. A textual note on the term λημμάτιον used in reference to the fifth postulate closes the article. The distinction between axioms and postulates and the "squares of propositions" are dealt with in two final appendices.

1. Il quinto postulato di Euclide[1]

La geometria sintetica[2] più antica e studiata nei secoli è quella che si fonda sugli *Elementi* di Euclide, a loro volta debitori dei già avanzati studi precedenti di cui offrono una sistemazione ordinata, e che è dunque definita "euclidea". L'impianto teorico costruito da Euclide si fonda su alcune nozioni preliminari distinte in "definizioni", "postulati" e "nozioni comuni". Da queste premesse assiomatiche discende una complessa struttura deduttiva che si ramifica in teoremi e problemi. Gli assiomi e soprattutto i postulati[3] costituiscono, dunque, il cuore della geometria euclidea: ogni loro variazione comporta cambiamenti profondi nella struttura generale.

---

* Ringrazio molto Concetta Luna per il suo aiuto costante e per avermi comunicato le correzioni inedite di Alain-Philippe Segonds al testo dell'*In Euclidem* di Proclo. Ringrazio inoltre Cristina D'Ancona, il comitato scientifico e i revisori anonimi della rivista *Studia graeco-arabica* per aver generosamente accolto questo articolo.

[1] Le citazioni degli *Elementi* sono tratte dall'edizione di J.L. Heiberg - E.S. Stamatis, 5 vol., Teubner, Leipzig 1969-1977. Le citazioni del commento di Proclo sono tratte dall'edizione di G. Friedlein, Procli Diadochi *In primum Euclidis Elementorum commentarii,* Teubner, Leipzig 1873 (rist. Olms, Hildesheim 1967) (le divergenze rispetto al testo Friedlein, eccetto quelle relative alla punteggiatura, sono segnalate in apparato). – Per le dimostrazioni e le figure geometriche, la conversione dall'alfabeto greco a quello latino è la seguente: Α = A, Β = B, Γ = C, Δ = D, Ε = E, Ζ = F, Η = G, Θ = H, Ι = I, Κ = K, Λ = L. – Tutte le traduzioni dal greco, dove non diversamente indicato, sono mie.

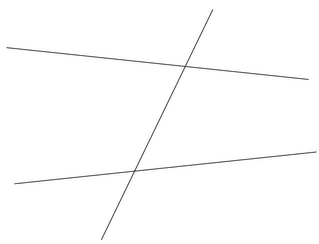
[2] Con geometria "sintetica" si intende quella che non è basata su un sistema di coordinate. Si oppone alla geometria "analitica" quale è, per esempio, la geometria cartesiana.

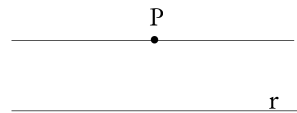
[3] Sulle diverse interpretazioni della distinzione tra assiomi e postulati riportate da Proclo nel commento agli *Elementi*, cf. *infra*, Appendice A, pp. 75-80.

 – doi: 10.12871/97888333961492

La formulazione del quinto postulato che Euclide dà negli *Elementi* è diversa da quella che si trova normalmente nei moderni trattati di geometria euclidea, coincidente sostanzialmente con il cosiddetto "assioma di Playfair":[4]

Elem. I, pet. 5, t. I, p. 5.4-7	Assioma di Playfair
Quando una retta, cadendo su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti,[5] le rette, prolungandosi illimitatamente,[6] si incontrano dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti.	Su un piano, dati una retta r e un punto P non appartenente a essa, è possibile tracciare per P una e una sola retta parallela alla retta r.





Il fatto che Euclide inserisca questa proposizione tra i postulati significa che per lui essa non può essere dimostrata e deve essere accettata preliminarmente dal lettore o dallo studente per poter procedere con le dimostrazioni delle proposizioni. Se Euclide non dimostra il quinto postulato e anzi si vede costretto a porlo come ipotesi *indimostrabile* alla base del suo edificio logico, "sappiamo oggi che ciò non torna a disonore del grande geometra, ma anzi costituisce il suo più alto titolo d'onore".[7] Infatti, oggi sappiamo che il quinto postulato è davvero, in un certo senso, indimostrabile. A partire soprattutto da Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e da Bernhard Riemann (1826-1866), si è provato a negare il quinto postulato mantenendo i primi quattro, cercando, in questo nuovo sistema assiomatico "difettivo", un punto debole che confermasse che il quinto postulato *non poteva non essere vero* e che dunque la sua validità era dimostrata. Ci si è inoltrati in una selva di strane figure geometriche, completamente diverse da quelle cui si era abituati, quali triangoli con somma degli angoli interni maggiore o minore di 180°, rettangoli con due angoli ottusi, rette parallele con distanza variabile. Alla fine, però, ci si è arresi all'evidenza che queste nuove geometrie, per quanto esotiche,

[4] John Playfair (1748-1819) è stato un matematico e filosofo scozzese. La formulazione dell'assioma è, in realtà, precedente a Playfair e risale all'esegesi antica. Il merito di Playfair consiste nell'aver sostituito questa proposizione al quinto postulato, di cui è equivalente, nel sistema assiomatico della geometria euclidea.

[5] Euclide, come Proclo e in generale i geometri antichi, dice semplicemente "i due angoli" o "gli angoli" intendendo la loro somma. Il termine "somma", infatti, non compare mai negli *Elementi* (cf. *Gli Elementi di Euclide*, a c. di A. Frajese - L. Maccioni, UTET, Torino 1970, "Premessa del traduttore", p. 35, punto 9) e viene sostituito, di volta in volta, da espedienti espressivi diversi. Poiché è in generale preferibile rispettare le specificità del linguaggio antico senza uniformarlo a quello moderno, si eviterà di introdurre il termine "somma" ogniqualvolta sarà possibile inferirlo dal contesto. Esso sarà esplicitato solo in caso di ambiguità (cf. *infra*, n. 106).

[6] Sulla concezione delle rette come infinite solo *in potenza* e non *in atto*, pertanto *illimitatamente* prolungabili, cf. *infra*, n. 40, 42, 62, 71 e 232.

[7] Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 54.

avevano una loro coerenza interna e si è iniziato a studiarle sistematicamente.[8] Ognuna di queste geometrie, poi definite *non euclidee*, possiede una propria *correttezza* (col tempo, per quanto ciò possa essere importante in ambito matematico, alcune di esse hanno rivelato anche un'utilità pratica).[9] Dunque, il quinto postulato di Euclide, lungi dall'essere dimostrabile, ha il ruolo di "chiave" con cui accedere in quello specifico spazio geometrico – non certo l'unico possibile – conosciuto come *geometria euclidea.*

2. I tentativi di dimostrazione del quinto postulato e l'esegesi antica degli Elementi

Come si può immaginare, i tentativi fallimentari di dimostrare questa proposizione si sono susseguiti fino agli inizi del XVIII secolo:[10] ai matematici sembrava evidente che essa dovesse essere deduttivamente dimostrabile nel sistema assiomatico della geometria euclidea. A corroborare questa impressione intuitiva si aggiungeva il fatto che, come si vedrà, il quinto postulato è incastonato in un quadrato di proposizioni[11] ed entra in un rapporto strettissimo con ciascuna di esse. Benché né l'inversa (prop. 17) né la contraria (prop. 27 e 28) siano direttamente implicate dal quinto postulato, per lungo tempo esse furono ritenute così vicine ad esso da rendere sorprendente, o addirittura inaccettabile, il fatto che le une potessero essere dimostrate, l'altro no.

È chiaro, dunque, perché anche l'approccio al quinto postulato da parte di Proclo e dei matematici a lui precedenti abbia mirato più a tentare di fornirne una dimostrazione che a capire perché era stato ritenuto indimostrabile da Euclide. È proprio dal commento di Proclo al primo libro degli *Elementi* che conosciamo non solo la sua opinione riguardo al quinto postulato, ma anche quella di diversi suoi predecessori. Difatti, il commento di Proclo è l'unico commento antico agli *Elementi* (o, come in questo caso, a una sua parte) di cui ci è giunto l'originale greco.[12] Proclo utilizza ampiamente i suoi predecessori e ne trasmette un'immagine che

---

[8] La dimostrazione dell'effettiva indipendenza del quinto postulato di Euclide dai primi quattro avvenne solo nella seconda metà dell'Ottocento ad opera di E. Beltrami (1835-1900). Egli dimostrò che esiste un modello geometrico in cui i primi quattro postulati valgono, il quinto no. Ciò equivale a dire che i primi quattro postulati non implicano il quinto. Il modello geometrico utilizzato è quello basato sulla pseudosfera, cioè la superficie di rivoluzione che si genera facendo ruotare una particolare curva geometrica, detta trattrice, intorno al proprio asintoto. Il nome deriva dal fatto che la sua curvatura è costante in ogni punto, come avviene nella sfera, ma è ovunque opposta a quella di una sfera di raggio uguale: una sfera e una pseudosfera di raggio R hanno in ogni punto curvatura $\frac{1}{R^2}$ e $-\frac{1}{R^2}$, rispettivamente.

[9] Si vedano, per esempio, gli studi di Riemann, molto fecondi in campo relativistico e quantistico.

[10] È del 1730 l'ultimo, strenuo tentativo di dimostrazione del quinto postulato costituito dall'*Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* di Gerolamo Saccheri. Con il suo uso sistematico della dimostrazione per assurdo, Saccheri aprì involontariamente la strada alle successive costruzioni di Riemann, Lambert, Lobačevskij, Bolyai, Gauss, ovvero allo sviluppo delle moderne geometrie non euclidee.

[11] Cf. *infra*, Appendice B, pp. 81-2.

[12] Del testo dell'*In Euclidem* non si ha, ad oggi, un'edizione critica soddisfacente. La *princeps*, opera di Simon Grynaeus, fu edita a Basilea nel 1533 (Εὐκλείδου στοιχείων βίβλ. ιε´ ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βίβλ. δ´. *Adiecta praefatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil*, Basileae, apud Ioannem Hervagium, anno M.D.XXXIII). Questa edizione è anche la *princeps* degli *Elementi* di Euclide. Il testo di Proclo è stampato dopo quello di Euclide, i cui ultimi due libri, XIV e XV, oggi considerati spuri, erano ancora ritenuti autentici. Per il testo di Proclo, essa si basa su un unico codice oxoniense, spesso lacunoso ed erroneo. La prima traduzione latina del 1539, opera di Bartolomeo Zamberti e basata sul testo greco della *princeps*, rimase inedita. Essa fu seguita, pochi anni dopo, dalla traduzione, certamente migliore, del veneziano Francesco Barozzi (Barocius):

altrimenti sarebbe stata definitivamente perduta.[13] La tradizione esegetica in cui si inserisce l'*In Euclidem* inizia con Erone di Alessandria (forse I sec. d.C.), probabilmente il primo ad avviare la tradizione del commento scientifico alessandrino scrivendone uno proprio sugli *Elementi* di cui, però, rimangono solo testimonianze indirette.[14] Essa arriva a Pappo (III-IV sec. d.C.), del cui commento agli *Elementi* possediamo interamente in traduzione araba la parte relativa al libro X.[15] Benché non abbiano commentato gli *Elementi*, hanno scritto opere di geometria – a volte in polemica con Euclide, e per questo sono spesso citati da Proclo – Apollonio[16] (III-II sec. a.C.),

---

Procli Diadochi Lycii philosophi platonici ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum Commentariorum [...] *libri IIII.* A Francisco Barocio patritio Veneto summa opera, cura, ac diligentia cunctis mendis expurgati: *Scholiis, et Figuris, quae in graeco codice omnes desiderabantur aucti*, Patavii, Excudebat Gratiosus Perchacinus, 1560. Barozzi ebbe la fortuna di trovare a Creta un codice antico del commento di Proclo, successivamente perduto, a cui aggiunse altri tre codici di età umanistica che usò per correggere il testo della *princeps*. Barozzi non pubblicò mai, però, il proprio testo greco, benché dalla sua traduzione latina sia a volte possibile inferire – con tutti i rischi che questo procedimento comporta – quale sia la lezione del modello greco utilizzato dal traduttore; il testo da lui ricostruito appare, così, molto superiore a quello della *princeps*. Sul testo della *princeps*, con sporadici controlli della traduzione di Barozzi, si basa ancora la traduzione inglese di Thomas Taylor alla fine del Settecento (*The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements*, by Th. Taylor, 2 vols., London 1792). Attualmente, l'edizione critica di riferimento è quella di Gottfried Friedlein del 1873: della trentina di manoscritti che tramandano il testo di Proclo, Friedlein utilizzò principalmente il più antico, M (= *Monac. gr.* 427) dell'XI sec.; di altri tre codici umanistici (*Vat. Barb. gr.* 101 e 145 e *Bonon. Univ.* 2293), ebbe a disposizione solo collazioni saltuarie. Tutte le traduzioni moderne (tranne quella di Taylor) si basano sul testo di Friedlein, apportandovi correzioni e miglioramenti congetturali: la traduzione tedesca di Schönberg del 1945, quella francese di Ver Eecke del 1948, quella inglese di Morrow del 1970 (2ª ed. 1992) e quella italiana di Timpanaro Cardini del 1978; a queste ultime due in particolare fa molto riferimento il presente lavoro. Sulla storia del testo di Proclo e delle sue edizioni, cf. C. Luna - A.-Ph. Segonds, "Proclus de Lycie", in R. Goulet (dir.), *Dictionnaire des Philosophes Antiques (= DPhA)*, vol. Vb, CNRS Éditions, Paris 2012, pp. 1546-657, in part. pp. 1626-7; Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements with Introduction and Notes* by G.R. Morrow, with a new foreword by I. Mueller, Princeton U.P., Princeton 1992², "Translator's Note", p. LXVIII; Proclo, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, introduzione, traduzione e note a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini editori e stampatori, Pisa 1978, pp. 20-1.

[13] Sui commentatori antichi degli *Elementi*, cf. B. Vitrac, "Euclide", in Goulet (dir.), *DPhA*, vol. III, CNRS Éditions, Paris 2000, pp. 252-72, in part. pp. 264-5; Euclide, *Tutte le opere*, a c. di F. Acerbi, Bompiani, Milano 2014, "Introduzione", pp. 233-59.

[14] Il titolo con cui è tramandato, riportato da fonti arabe e probabilmente spurio, è *Libro della soluzione delle difficoltà in Euclide.* Il taglio del commento di Erone è più critico che esegetico e l'autore analizza aspetti di coerenza logica e di struttura deduttiva. Sulle opere di Erone, cf. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2: *From Aristarchus to Diophantus*, Clarendon Press, Oxford 1921, pp. 298-354.

[15] Pappo di Alessandria è autore di vari commenti, tra cui quelli all'*Almagesto* e alle *Armoniche* di Tolomeo e quello agli *Elementi* di Euclide. Tutte le sue opere sono andate perdute tranne la *Synagoge* o *Collectiones mathematicae*, compendio di matematica greca in otto libri di cui sono perduti il primo e parte del secondo. Resta ancora memoria di Pappo in vari teoremi tuttora utilizzati in matematica come il "Teorema dell'esagono di Pappo" o il "Teorema di Pappo-Pascal". La versione araba del suo commento al libro X degli *Elementi* è l'unico altro commento, oltre a quello di Proclo, di cui possediamo un intero libro, benché in traduzione. Dai riferimenti contenuti nel commento di Proclo, ricaviamo che, per quanto riguarda il primo libro degli *Elementi*, Pappo forniva dimostrazioni alternative di alcune proposizioni e proponeva ulteriori assiomi. È Pappo, inoltre, a ribadire la necessità che il quarto postulato resti tale; Proclo, invece, insieme con altri matematici a lui precedenti, sostiene che il quarto postulato, come il quinto, non debba essere considerato un postulato ma un teorema. Sulle opere di Pappo, cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 355-439.

[16] Apollonio di Perga è autore di un trattato monumentale sulle coniche in otto libri: possediamo il testo greco solo dei primi quattro, una traduzione araba dei libri V-VII, mentre l'ottavo è del tutto perduto. Sui contenuti della sua opera, cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 126-96.

Posidonio[17] (II-I sec. a.C.) e Gemino[18] (I a.C.-II sec. d.C.): le loro osservazioni, riportate da Proclo, riguardano spesso definizioni alternative di enti geometrici, dimostrazioni dirette di proposizioni che Euclide dimostra per assurdo o classificazioni di vario genere (assiomi e postulati, tipi di linee, scienze matematiche). Proclo cita anche Porfirio (III sec. d.C.) tra le fonti da cui trae dimostrazioni alternative di proposizioni ed esempi aggiuntivi a quelli proposti da Euclide: frammenti e testimonianze di contenuto geometrico si trovano unicamente nell'*In Euclidem* di Proclo.[19] Menelao di Alessandria (I sec. d.C.) è autore di un'opera di geometria sferica che ci è giunta attraverso traduzioni arabe: i primi teoremi sui triangoli sferici sono chiaramente pensati come una riscrittura dell'ordine deduttivo di quelli sui triangoli piani degli *Elementi*.[20] Infine, Tolomeo (II sec. d.C.), secondo la testimonianza di Proclo, è autore di un'opera sulle rette parallele e sulla dimostrazione del quinto postulato.[21]

Proprio in relazione al quinto postulato, Proclo riporta innanzitutto le opinioni di chi, come Gemino (pp. 183.14-184.5), riteneva che esso potesse (e dovesse) essere dimostrato e che invece Euclide, postulandolo, avesse "incluso tra gli indimostrabili[22] anche ciò che ha bisogno di una dimostrazione" (οἱ δὲ καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσειλήφασιν, ὡς αὐτὸς Εὐκλείδης, p. 183.20-22). Successivamente, nel suo commento alle

[17] Posidonio di Apamea è citato soprattutto come autore di alcune definizioni, come quelle di "figura" o di "parallele", e per i contributi alla discussione riguardo ad alcuni termini tecnici, come "teorema" e "problema". Più estesi e importanti sono i suoi contributi in geografia e astronomia. Cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 219-22; K. Algra, "Posidonius d'Apamée", in Goulet (dir.), *DPhA*, vol. Vb, CNRS Éditions, Paris 2012, pp. 1481-99, in part. pp. 1493-5.

[18] Proclo cita l'opera di Gemino con il termine φιλοκαλία (p. 177.24-25): Τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τῆς Γεμίνου φιλοκαλίας εἰς τὴν τῶν προκειμένων ἐξήγησιν ἀνελεξάμεθα, "Questo abbiamo tratto dalla *philokalia* di Gemino per la spiegazione del presente testo". Secondo Heath, "the word φιλοκαλία is a title or an alternative title" (Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 [*supra*, n. 14], p. 223). Il termine φιλοκαλία indica in generale un'opera di cultura e, in aritmetica, il calcolo (cf. Vettio Valente, *Anth*. IX 19, p. 346.23 Pingree). Pappo (*Syn.* VIII, p. 1026.9 Hultsch) cita un'opera di Gemino ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως, "nel [libro] *Sulla classificazione delle scienze matematiche*", Eutocio (*Comm. in Conica*, ed. J.L. Heiberg, Apollonii Pergaei *quae Graece exstant*, vol. 2, Teubner, Leipzig 1893, p. 170.26) cita un passo che si trova ἐν τῷ ἕκτῳ… τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, "nel sesto [libro] de *La teoria delle scienze matematiche*"; probabilmente il titolo corretto è quello di Eutocio e Pappo fa riferimento solo a un libro dell'intera opera, forse il primo. Se il sesto trattava delle coniche (come si evince dal passo di Eutocio), l'opera di Gemino doveva comprendere più libri, dato che Proclo cita curve più complesse riportando la sua classificazione. Su Gemino, cf. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 1: *From Thales to Euclid*, Clarendon Press, Oxford 1921, pp. 119, 135-6, 358; Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 222-34, in part. p. 223 sulla questione del titolo e pp. 227-30 sul postulato delle rette parallele (di cui Gemino tenta anche una propria complessa dimostrazione, ovviamente fallace); R.B. Todd, "Géminos", in Goulet (dir.), *DPhA*, vol. III, CNRS Éditions, Paris 2000, pp. 472-77, in part. pp. 474-5.

[19] Non sappiamo quale fosse la natura di quest'opera. Nella raccolta dei frammenti di Porfirio edita da A. Smith (Teubner, Stuttgart-Leipzig 1993), non si parla di commento agli *Elementi* e tutti i frammenti tratti dall'*In Eucl.* di Proclo sono annoverati fra i "Testimonia et fragmenta incertae sedis" (pp. 552-62).

[20] Su Menelao, cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 260-73; P.P. Fuentes González, "Ménélaos d'Alexandrie", in Goulet (dir.), *DPhA*, vol. IV, CNRS Éditions, Paris 2005, pp. 456-64.

[21] L'opera di Tolomeo citata da Proclo, nota come *De rectis parallelis*, è perduta. Gli unici frammenti giunti fino a noi sono conservati da Proclo, *In Eucl.*, pp. 362.14-363.18 e 365.7-368.1 (= Claudii Ptolemaei *Opera quae extant omnia*, vol. II: *Opera astronomica minora*, ed. J.L. Heiberg, Teubner, Leipzig 1907, fr. 7-8, pp. 266-70). Su Tolomeo, cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 273-97; G. Saliba, "Ptolémée d'Alexandrie (Claude –)", in Goulet (dir.), *DPhA*, vol. Vb, CNRS Éditions, Paris 2012, pp. 1718-35.

[22] Sulla distinzione di Gemino tra assiomi e postulati secondo cui anche i postulati sono indimostrabili (*contra*, e.g., Aristotele), cf. *infra*, Appendice A, pp. 76-80.

prop. 27, 28 e soprattutto 29, Proclo riporta il tentativo di dimostrazione di Tolomeo[23] e lo confuta (pp. 362.13-363.18 e 365.7-368.26). Cita, poi, un'opinione paradossale – anche se, in sé, ingegnosa – di alcuni matematici anonimi secondo cui il quinto postulato non solo non è dimostrabile, ma è addirittura falso. Secondo loro, infatti, è impossibile che rette che, tagliate da una trasversale, formano angoli minori di due retti si incontrino dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti: la dimostrazione si basa sul concetto di divisione infinita e richiama, in un certo senso, il celebre paradosso di Achille e della tartaruga (pp. 368.26-369.20). Confutata anche questa tesi (pp. 369.21-371.10), Proclo propone la propria dimostrazione del quinto postulato (pp. 371.10-373.2). Anch'essa contiene, ovviamente, delle fallacie logiche che la invalidano.

La traduzione e l'analisi dei tentativi di dimostrazione del quinto postulato presenti nell'*In Eucl.* sono state fatte da Heath.[24] Scopo di questo studio è di ampliare la discussione a tutte le altre parti dell'*In Eucl.* che riguardano il quinto postulato. Dopo la definizione di "parallele" (§ 4), la trattazione procede seguendo lo schema del quadrato delle proposizioni: proposizione diretta, cioè il quinto postulato (§ 5); proposizione inversa, cioè la prop. 17 (§ 6); proposizione contraria, cioè le prop. 27 e 28 (§ 7); proposizione contronominale,[25] cioè la prop. 29 (§ 8). L'analisi dei testi è seguita da una nota testuale sul termine λημμάτιον con cui Proclo (p. 365.13) sembra designare il quinto postulato (§ 9). Due appendici, relative rispettivamente alla distinzione tra assiomi e postulati (A) e ai quadrati di proposizioni (B), chiudono l'articolo.

3. *La struttura del* Commento *di Proclo e il rifiuto delle geometrie non-euclidee*

Il commento di Proclo al primo libro degli *Elementi* di Euclide è aperto da due prologhi, il primo sulla filosofia della matematica in generale (pp. 3-47), il secondo su quella della geometria (pp. 48-84),[26] cui segue la trattazione sistematica delle definizioni (pp. 85-177), dei postulati e degli assiomi (pp. 178-98) e delle singole proposizioni del primo libro degli *Elementi*, divise in due parti, prop. 1-26 (pp. 199-353) e prop. 27-48 (pp. 354-432).[27] Un certo numero di rimandi al futuro[28] inducono a ritenere che Proclo avesse intenzione di commentare anche gli altri libri degli *Elementi*, ma "la fin du texte […] laisse entendre que Proclus doute fortement, quelle qu'en soit la raison, de pouvoir réaliser l'équivalent pour les Livres suivants".[29]

---

[23] Sul *De rectis parallelis* di Tolomeo, cf. *supra*, n. 21.

[24] Cf. T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*, vol. 1: *Introduction and books* I, II, Cambridge U.P., Cambridge 1908, pp. 204-8. Il tentativo di dimostrazione di Tolomeo è analizzato e discusso anche in Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 295-7.

[25] Per il significato di "diretta", "inversa", "contraria" e "contronominale", cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

[26] Allo studio dei due prologhi dell'*In Euclidem* è dedicata la maggior parte degli articoli contenuti nella raccolta A. Lernould (ed.), *Études sur le Commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve-d'Ascq 2010.

[27] Questa divisione delle proposizioni si basa proprio sull'uso del quinto postulato; cf. *infra*, p. 40.

[28] Cf. Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), "Introduction", pp. lv-lvi; cf. anche Luna-Segonds, "Proclus de Lycie" (*supra*, n. 12), pp. 1625-6.

[29] M. Caveing, "Introduction générale", in Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, traduits du texte de Heiberg, vol. 1: *Introduction générale* par M. Caveing, *Livres I-IV: Géométrie plane*, traduction et commentaires par B. Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris 1990, pp. 36-7.

Al di là dei rimandi interni a un'eventuale continuazione del commento, la concezione stessa che Proclo aveva dell'opera euclidea induce a credere che probabilmente, se ne avesse avuto il tempo, avrebbe commentato tutti i libri degli *Elementi*: "Proclus says that Euclid was a professing Platonist and that he organized the *Elements* to culminate in the treatment of the regular solids because of Plato's use of these solids in the physics of the *Timaeus*".[30]

All'interno del commento alle definizioni si trova un'implicita presa di posizione di Proclo (che parrebbe attribuita, in realtà, allo stesso Euclide) contro le geometrie non euclidee. Infatti, alla fine del commento della definizione 7 (cf. *Elem.* I, def. 7, t. I, p. 1.8-9: Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται, "Superficie piana[31] è quella che giace ugualmente rispetto alle proprie rette"[32]), Proclo scrive (pp. 120.13-121.7):

> Τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἡμῖν εἰρήσθω διαφορῶν, ὧν μίαν ὁ γεωμέτρης ἐκλεξάμενος, τὴν ἐπίπεδον, ταύτην ὡρίσατο, καὶ ὡς ἐπὶ ταύτης[a] ὑποκειμένης θεωρήσει τά τε σχήματα καὶ τὰ τούτων πάθη. καὶ γὰρ εὐπορώτερος ὁ λόγος αὐτῷ γίνεται μᾶλλον ἢ ἐπ᾽ ἄλλης ἐπιφανείας. καὶ γὰρ εὐθείας καὶ κύκλους καὶ ἕλικας ἐπὶ ταύτης νοεῖν δυνατόν, καὶ τομὰς κύκλων καὶ εὐθειῶν καὶ ἁφὰς καὶ παραβολὰς καὶ γωνιῶν παντοίων συστάσεις· ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν οὐ πάντα ταῦτα δύναται θεωρηθῆναι. ἐπὶ γὰρ τῆς σφαιρικῆς πῶς ἂν εὐθεῖαν λάβοις ἢ εὐθύγραμμον γωνίαν; ἐπὶ δὲ τῆς κωνικῆς ἢ κυλινδρικῆς πῶς ἂν κύκλων τομὰς ἢ εὐθειῶν θεωρήσειας; εἰκότως οὖν καὶ ὡρίσατο ταύτην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς πάντα ἐκτιθέμενος πραγματεύεται· καὶ γὰρ τὴν πραγματείαν ἐντεῦθεν ἐπίπεδον προσείρηκεν. καὶ οὕτω δεῖ νοεῖν τὸ μὲν ἐπίπεδον οἷον προβεβλημένον καὶ πρὸ ὀμμάτων κείμενον, πάντα δὲ ὡς ἐπὶ τούτῳ τὴν διάνοιαν γράφουσαν, τῆς μὲν φαντασίας οἷον ἐπιπέδῳ κατόπτρῳ προσεικασμένης, τῶν δὲ ἐν διανοίᾳ λόγων τὰς ἑαυτῶν ἐμφάσεις εἰς ἐκεῖνο καταπεμπόντων.
>
> [a] ὡς ἐπὶ ταύτης] ἐπὶ ταύτης ὡς coni. Luna.

---

[30] I. Mueller, "Foreword", in Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. xxx. Per i riferimenti ad un eventuale commento ad altri libri, cf. p. 272.14-16: μᾶλλον γὰρ ἂν κατὰ καιρὸν ἐξετάσαιμεν ἴσως ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ τοῦ στοιχειωτοῦ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνοντος; p. 398.18-19: Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἐν ἄλλοις δείξομεν· πρεπωδέστερα γάρ ἐστι ταῖς ὑποθέσεσι τοῦ δευτέρου βιβλίου; p. 427.9-10: Ὅπως μὲν οὖν δείκνυται τὸ ἐν τῷ ἕκτῳ θεωρήματι, ἐν ἐκείνοις ἔσται δῆλον; p. 432.9-11: ἡμεῖς δέ, εἰ μὲν δυνηθείημεν καὶ τοῖς λοιποῖς τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξελθεῖν, τοῖς θεοῖς ἂν χάριν ὁμολογήσαιμεν. Per l'idea di Proclo che lo scopo degli *Elementi* sia giungere alla trattazione dei solidi regolari descritti nel *Timeo*, cf. pp. 68.20-23, 70.19-71.5, 82.25-83.2, 423.9-21. Si noti anche pp. 383.17-384.4 in cui è lo stesso Proclo a enunciare delle proprietà relative a triangoli particolari ὡς προπαρασκευάζοντα ἡμᾶς πρὸς τὴν τοῦ Τιμαίου διδασκαλίαν.

[31] Nell'espressione Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἐπιφάνεια (= superficie) rappresenta il genere, ἐπίπεδος (= piana) la differenza specifica. Dovendo definire la linea retta, Euclide definisce prima il genere (cf. *Elem.* I, def. 2, t. I, p. 1.2: Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές, "Linea è lunghezza senza larghezza"), poi i suoi estremi (cf. *Elem.* I, def. 3, t. I, p. 1.3), infine la specie (cf. *Elem.* I, def. 4, t. I, p. 1.4-5: Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, "Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai propri punti"). Analogamente, anche con la superficie piana, Euclide definisce prima il genere (cf. *Elem.* I, def. 5, t. I, p. 1.6: Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει, "Superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza"), poi i suoi estremi (cf. *Elem.* I, def. 6, t. I, p. 1.7), infine la specie (def. 7).

[32] Questa definizione, unanimemente considerata poco perspicua dai commentatori moderni, richiama chiaramente la formulazione della definizione di linea retta (ovvero la definizione 4; cf. *supra*, n. 31). Sull'origine e sul significato di questa definizione di retta (e dunque di superficie piana), cf. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), pp. 165-9; cf. anche Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. 88, n. 45. Proclo dà una spiegazione della formulazione della definizione 4 a p. 109.6-20 e della definizione 7 a p. 117.1-6.

Tanto sia detto da noi anche[33] riguardo alle differenze tra le superfici.[34] Tra di esse, il Geometra ne ha scelto una, quella piana, e l'ha definita ed è su di essa, in quanto sottostante,[35] che egli considererà sia le figure che le loro proprietà. E infatti, il suo discorso diventa più ricco[36] [su questa] che su un'altra superficie, perché su questa[37] è possibile pensare rette, cerchi,[38] spirali, intersezioni e contatti tra cerchi[39] e rette, parabole[40] e costruzioni di angoli d'ogni tipo, mentre sulle altre superfici non è possibile che siano considerate tutte queste cose: in che modo si potrebbe prendere una retta o un angolo rettilineo sulla [superficie] sferica? In che modo si potrebbero considerare intersezioni di cerchi o di rette sulla [superficie] conica o cilindrica? È dunque a ragion veduta che [Euclide] ha sia definito questa superficie, sia composto [la sua opera] ponendo tutto su di essa; ed è in effetti a partire da qui che ha

---

[33] Proclo aveva già fatto un'analisi delle linee simile a quella appena conclusa riguardo alle superfici (sulla quale cf. *infra*, n. 34).

[34] Si intendono, naturalmente, le differenze specifiche per mezzo delle quali a partire dal genere ἐπιφάνεια si individuano le sue specie, tra cui l'ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Proclo elenca le diverse specie di superficie, le loro generazioni e le loro caratteristiche a pp. 117.18-120.12.

[35] La posizione di ὡς sembra problematica: in base al senso della frase, infatti, ὡς dovrebbe portare su ὑποκειμένης e non su ἐπὶ ταύτης (cf. la trasposizione proposta da C. Luna). Il significato di ὑποκειμένης è puramente geometrico: Proclo sta dicendo che la superficie piana soggiace alle figure, che difatti giacciono su di essa (ἐπὶ ταύτης). Probabilmente scorretta, dunque, la traduzione di Morrow: "Our geometer has chosen one of them, the plane, for definition as the subject in which we will study the figures and their properties" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 97), che tuttavia considera chiaramente ὡς connesso a ὑποκειμένης e non a ἐπὶ ταύτης. Più corretta per quanto riguarda il significato, ma forse banalizzante, la traduzione di Timpanaro Cardini: "e, come collocate su questa, considererà ora le figure e le loro proprietà" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 113).

[36] εὔπορος indica ciò che è di facile passaggio (πόρος) o di facile accesso, quindi anche semplicemente ciò che è facile. In una seconda accezione, però, indica ciò che è ben fornito, ricco, o anche fertile. Proclo afferma che Euclide ha scelto questa particolare superficie, cioè quella piana, perché su di essa il λόγος è più εὔπορος, poi giustifica quest'affermazione spiegando che sulle altre superfici non è possibile considerare (ma si noti che Proclo usa θεωρεῖν, che contiene in sé anche l'idea di "osservare") tutte le cose che si possono considerare su quella piana. Credo, dunque, che Proclo non stia parlando di facilità (come invece interpreta Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 97: "for his inquiry can proceed more easily with this than with any other surface"), ma di una differenza di ricchezza o abbondanza di figure osservabili sui vari tipi di superficie. Certamente errata la traduzione di Timpanaro Cardini: "ché il suo studio si svolge più diffusamente su questa superficie che su ogni altra" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 113), perché negli *Elementi* non si considerano mai figure su superfici diverse da quella piana (per cenni di geometria sferica, intesa però come connessa all'astronomia, cf. *infra*, n. 51). Dell'importanza di questa considerazione di Proclo si discuterà diffusamente più avanti.

[37] *Scil.* quella piana.

[38] È in realtà probabile che qui Proclo stia pensando più alla circonferenza (περιφέρεια) che al cerchio (κύκλος). Qui, come altrove (cf. per es. p. 180.3), Proclo non fa una chiara distinzione tra i due enti geometrici.

[39] Cf. *supra*, n. 38.

[40] A pp. 419.15-420.12 Proclo spiega che i termini "parabola", "ellisse" e "iperbole" erano usati dai Pitagorici per indicare diversi tipi di applicazione di aree a rette (intese, com'è normale nella geometria greca, come segmenti), ma che i moderni (οἱ νεώτεροι) hanno trasferito queste denominazioni alle coniche (come nell'uso terminologico moderno). Dunque, Proclo conosceva entrambi questi usi. Mi sembra più plausibile che, in questo punto in cui sta elencando le figure geometriche di cui la geometria euclidea è ricca, Proclo faccia riferimento alla parabola intesa come conica piuttosto che a un metodo di applicazione di aree. Si noti, tra l'altro, che Proclo ha appena usato παραβολή riferendosi alla conica (p. 119.23). Diversamente Morrow e Timpanaro Cardini, che traducono rispettivamente "to make application of areas" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], pp. 97-8) e "applicazioni di aree" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 113). Un'ampia trattazione dei tipi di applicazione delle aree si trova in Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), pp. 166-70, n. 4.

chiamato la sua trattazione “[di geometria] piana”.[41] E così bisogna pensare che il piano è, per così dire, prolungato[42] e giacente davanti ai nostri occhi, il pensiero[43] disegna su di esso tutte [le figure], mentre l’immaginazione assomiglia, per così dire, ad uno specchio piano e i concetti[44] che sono nel pensiero mandano i propri riflessi su di esso.

Le osservazioni principali da fare riguardo a questo passo sono due:

(1) A p. 116.17-24, Proclo afferma che i filosofi più antichi (τοῖς... παλαιοτέροις τῶν φιλοσόφων) non ritenevano corretto porre il piano (τὸ ἐπίπεδον) come una specie della superficie (ἡ ἐπιφάνεια), ma consideravano i due termini del tutto equivalenti per indicare la grandezza che ha due dimensioni. Proclo sottolinea che Platone definiva la geometria “studio dei piani”[45] e che anche Aristotele era d’accordo con quest’equivalenza terminologica. In effetti, noi sappiamo che Aristotele usava ἐπίπεδος e ἐπιφάνεια indifferentemente per qualsiasi tipo di superficie, benché forse con una maggiore frequenza di ἐπιφάνεια rispetto a ἐπίπεδος per designare una superficie non piana.[46] Tuttavia, a pp. 116.25-117.1, Proclo fornisce una

---

[41] ἐπίπεδος, -ον è un aggettivo che si riferisce a πραγματεία: “trattazione piana” = “trattazione della geometria piana”.

[42] Normalmente, il verbo utilizzato per esprimere l’estensione indefinita è ἐκβάλλω (frequente è l’espressione ἐπ’ ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι riferita alle rette prolungabili all’infinito; cf. *infra*, n. 71), e non προβάλλω. Ma a p. 217.2-3, Proclo parla di εὐθεῖα προβληθεῖσα dal centro alla circonferenza. Se i due verbi non sono perfettamente sovrapponibili nell’uso, possono comunque indicare lo stesso atto di estensione. Da segnalare è anche l’uso di questo verbo tipico di Speusippo, su cui cf. *infra*, Appendice A, n. 226.

[43] La διάνοια è il ragionamento discorsivo, la facoltà propria delle scienze matematiche, che perviene alle idee mediante dimostrazioni e passaggi più o meno lunghi. Si oppone alla νόησις, l’intellezione, che è la facoltà di cogliere le Idee in modo immediato; cf. *In Eucl.*, pp. 10.21-11.9, 11.26-12.1, 55.6-10.

[44] Secondo la terminologia utilizzata da Proclo, i λόγοι sono indivisibili (cf. *In Eucl.* p. 50.14-15: τῶν ἐν διανοίᾳ λόγων ἀμερῶν ὄντων καὶ ἀδιαστάτων) e perciò si distinguono dalle dimostrazioni e dai ragionamenti. I λόγοι sono i concetti o le idee matematiche che preesistono nell’anima e che il pensiero (ἡ διάνοια) emette e sviluppa, creando così tutta la varietà delle scienze matematiche; quest’azione della διάνοια sui λόγοι è eterna e senza pause (cf. *In Eucl.,* pp. 17.22-18.1: οὐσιώδεις ἄρα καὶ αὐτοκίνητοι τῶν μαθημάτων εἰσὶν οἱ λόγοι συμπληροῦντες τὰς ψυχάς, οὓς δὴ καὶ προβάλλουσα ἡ διάνοια καὶ ἐξελίττουσα πᾶσαν τὴν ποικιλίαν ὑφίστησι τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, καὶ οὐ μή ποτε παύσηται, γεννῶσα μὲν ἀεὶ καὶ ἀνευρίσκουσα ἄλλα ἐπ’ ἄλλοις, τοὺς δὲ ἀμερεῖς αὐτῆς λόγους ἐξαπλοῦσα). La diversità dei λόγοι (in questo caso intesi, forse, come “rapporti” principali preesistenti nell’anima da cui derivano tutti gli altri: sugli ἑπτὰ λόγοι, cf. Plat., *Tim*. 35 B 4-36 B 6 e Procl., *In Eucl.*, p. 17.17-18) è anche uno dei presupposti che permettono alla διάνοια di produrre (προβάλλειν) l’aritmetica (cf. *In Eucl.*, p. 36.18-21). A pp. 53.18-54.13, Proclo distingue funzioni e caratteristiche di diversi κυκλικοὶ λόγοι; certi λόγοι si trovano già nella διάνοια, ma per conoscerli dovremmo essere in grado di eliminare gli impedimenti che provengono dalle sensazioni (cf. *In Eucl.,* p. 46.9-11: ὅταν οὖν ταῦτα [*scil.* τὰ ἐμπόδια τὰ ἐκ τῆς αἰσθήσεως, cf. p. 46.2-3] τῆς διανοίας ἀφέλωμεν, τότε κατ’ αὐτὴν γιγνώσκειν τοὺς ἐν αὐτῇ δυνάμεθα λόγους). Quando operiamo una dimostrazione geometrica, è a questi λόγοι nella διάνοια che facciamo riferimento (cf. *In Eucl.*, p. 54.24-26); poiché, però, la διάνοια non è capace di vedere (ἰδεῖν) i λόγοι che ha in sé perché essi sono involuti (συνεπτυγμένως), si serve dell’immaginazione (ἡ φαντασία) per svilupparne la conoscenza (cf. *In Eucl.*, pp. 54.27-56.22; cf. anche Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 44, n. 10).

[45] Il riferimento è a Plat., *Resp.* VII, 528 D 2-3: τὴν μὲν γάρ που τοῦ ἐπιπέδου πραγματείαν γεωμετρίαν ἐτίθεις, dove però si usa il genitivo singolare e non plurale. In realtà, Platone non usa mai ἐπιφάνεια nel senso di superficie e usa ἐπίπεδος sia come “superficie” che come “superficie piana”. La notizia di Diogene Laerzio, III 24, secondo cui Platone sarebbe stato il primo a chiamare ἐπίπεδος ἐπιφάνεια la superficie piana è considerata dubbia da Heath, *The thirteen books of Elements* (*supra*, n. 24), p. 169, mentre secondo Morrow potrebbe essere frutto di una qualche tradizione degli insegnamenti orali di Platone (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 94, n. 66).

[46] Ci sono alcuni casi di uso di ἐπίπεδος per superfici non piane (cf. Heath, *The thirteen books of Elements* [*supra*, n. 24], p. 169). Nel cap. 6 delle *Categorie*, dedicato alla quantità, per esempio, Aristotele usa i due termini nella

notizia ancora più importante: è a partire da Euclide (Εὐκλείδης δὲ καὶ οἱ μετ' αὐτὸν) che l'equivalenza tra i due termini scompare e che la superficie piana diventa solo una specie del genere "superficie", che ne contiene anche molte altre. Questo passaggio non è banale: infatti, fino a Platone e Aristotele, l'uso quasi antonomastico del genere per indicare la specie mostra una sostanziale indifferenza teoretica per tutti gli altri tipi di superfici, come se fosse dato per scontato che la superficie non potesse essere altro che quella piana. Questa equivalenza giunge fino al punto di definire "piano" (ἐπίπεδος) una superficie non piana. Euclide, invece, chiarisce la distinzione formale[47] e anzi definisce prima il genere e i suoi estremi, poi la specie particolare.[48] Le altre specie di superfici non sono subordinate a quella piana, né quella piana ha una preminenza *a priori* sulle altre.

(2) Secondo Proclo, Euclide, dopo aver chiarito (anche se implicitamente) che la superficie è un genere e che dunque non va confusa con una delle sue specie, sceglie quale specie di superficie porre a fondamento della sua geometria. Lo stesso Proclo sottolinea che quella di Euclide è una scelta (ἐκλεξάμενος) e la giustifica dicendo che sulla superficie piana "il discorso è più ricco". Seguono esempi di enti geometrici presenti nella geometria piana (cioè nella geometria euclidea) e assenti nelle altre.

Queste due osservazioni permettono di dire che, nell'ottica di Proclo, Euclide ha scelto la geometria euclidea, scartando quelle non euclidee. Tra gli esempi di superfici non piane che Euclide avrebbe scartato in favore di quella piana, Proclo cita quella sferica. La geometria cosiddetta "sferica" era in realtà nota da tempo come connessa all'astronomia, di cui era propedeutica e talvolta sinonima nella classificazione delle discipline[49] in quanto subordinata allo studio di problemi riguardanti la posizione e il moto dei corpi celesti.[50] In questo senso piuttosto ristretto, era già stata ampiamente studiata da matematici anteriori a Euclide,[51] nonché da Euclide stesso nei *Phaenomena*.[52] La geometria sferica, intesa in questo senso, fa largo uso dello spazio tridimensionale in cui la sfera stessa (e la sua superficie) è inserita. La sfera considerata è dunque immersa nello spazio euclideo e può essere intersecata da piani appartenenti a questo spazio che individuano su di essa delle circonferenze, tra cui, per esempio, i meridiani e i paralleli.

Il passo successivo che, secondo Proclo, Euclide non compie è quello di considerare la superficie sferica di per sé, cioè di studiarne le cosiddette "proprietà intrinseche", quelle

---

stessa frase e con riferimento allo stesso tipo di ente geometrico: ἡ δὲ γραμμὴ συνεχές ἐστιν· ἔστι γὰρ λαβεῖν κοινὸν ὅρον πρὸς ὃν τὰ μόρια αὐτῆς συνάπτει, στιγμήν· καὶ τῆς ἐπιφανείας γραμμήν, – τὰ γὰρ τοῦ ἐπιπέδου μόρια πρός τινα κοινὸν ὅρον συνάπτει. – ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ σώματος ἔχοις ἂν λαβεῖν κοινὸν ὅρον, γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, πρὸς ἣν τὰ τοῦ σώματος μόρια συνάπτει (5 a 1-4).

[47] Solo una volta Euclide utilizza il termine generico ἐπιφάνεια laddove ci si aspetterebbe il termine specifico ἐπίπεδος: Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις (*Elem.* XI, def. 11, t. IV, p. 2.9-11). Secondo Heath, la confusione (un *unicum* negli *Elementi*) è dovuta al fatto che questa definizione particolare di angolo solido "came from an earlier textbook" (Heath, *The thirteen books of Elements* [*supra*, n. 24], p. 169).

[48] Cf. *supra*, n. 31.

[49] Anche in Proclo: cf. *In Eucl.*, pp. 35.28-36.3.

[50] Cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 1 (*supra*, n. 18), pp. 11-2.

[51] L'unico nome noto è quello di Autolico di Pitana (IV-III sec. a.C.), anche se vari indizi fanno pensare a un testo di geometria sferica (astronomica) perduto anteriore ad Autolico che sarebbe poi confluito nell'opera di Teodosio di Bitinia (II sec. a.C.); cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 1 (*supra*, n. 18), pp. 348-53; Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 245-53.

[52] Cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 1 (*supra*, n. 18), pp. 440-1.

proprietà che non dipendono dal suo essere inserita in uno spazio tridimensionale, con i suoi piani e le sue rette. Questo passo, che consiste dunque nello studiare una superficie come ambiente geometrico *a priori*, sarà compiuto per la geometria sferica solo da Menelao di Alessandria nei suoi *Sphaerica*, in tre libri.[53] La geometria esplorata da Menelao è a tutti gli effetti una geometria non euclidea, in particolare una varietà delle geometrie ellittiche: in essa, due rette si incontrano sempre in almeno un punto, dunque non esistono parallele ed esistono, invece, coppie di rette che si incontrano in due punti e che racchiudono, da sole, una superficie, il cosiddetto "biangolo". Evidentemente, nella geometria sferica il quinto postulato di Euclide non vale.

Fatte queste considerazioni, ci si può chiedere quanto sia plausibile che l'uso euclideo della superficie piana come fondamento geometrico sia davvero una scelta. Elementi di geometria sferica, benché nel particolare senso legato all'astronomia, sono presenti, come si è detto, in un'altra opera di Euclide, i *Phaenomena*. Essa, invece, è del tutto esclusa dalla trattazione degli *Elementi*, se non per alcune definizioni generali relative alla sfera e per qualche problema di inscrizione di poliedri; l'unica proprietà specifica enunciata è quella relativa ai rapporti tra i volumi e i diametri di due sfere.[54] L'assenza dagli *Elementi* della geometria sferica intesa come studio propedeutico all'astronomia, cioè come studio della sfera inserita comunque in uno spazio euclideo, si spiega facilmente considerando la distinzione tra le due discipline: "No doubt the exclusion of geometry of the sphere from the *Elements* was due to the fact that it was regarded as belonging to astronomy rather than pure geometry".[55] La scelta prospettata da Proclo, però, è diversa. Proclo non dice che Euclide avrebbe potuto inserire una trattazione di geometria sferica (= astronomica) negli *Elementi* e che non l'ha fatto; infatti, quella trattazione si trova in un altro libro e si inserisce comunque agevolmente nello spazio euclideo: in essa, chiaramente, il quinto postulato continua a valere, e la distinzione tra *Elementi* e *Phaenomena* è solo legata alla differenza di disciplina. Ciò che Euclide non fa, secondo Proclo, è porre le sue figure e le sue linee sulla superficie sferica, cioè fare il passo che sarà fatto da Menelao. Proclo dice che Euclide ha scelto la superficie piana perché essa consente una trattazione più vasta e ricca delle altre. È chiaro che Proclo può fare un confronto tra le due superfici perché conosce gli studi di Menelao.[56]

Non è possibile stabilire se, dati i presupposti della matematica del tempo, Euclide avrebbe potuto davvero scegliere di fondare la sua geometria su una superficie diversa da quella piana, né se davvero potesse confrontare la maggiore o minore ricchezza di figure costruibili sull'una o sull'altra e utilizzare questo confronto come criterio. D'altronde, è innegabile che gli studi dello stesso Menelao sono profondamente debitori, sia nel contenuto che nella struttura, di quelli euclidei. Non è possibile sapere se lo studio sistematico della geometria sferica sarebbe stato condotto con la stessa efficacia senza una precedente trattazione ordinata ed esaustiva di quella euclidea.

Ciò che è chiaro, per noi moderni, è che nel momento in cui Euclide ha scelto la superficie piana (non importa se volontariamente o no), ha scelto anche il quinto postulato. La sua

---

53 Su Menelao, cf. *supra*, p. 23 e n. 20.

54 Cf. *Elem.* XII, prop. 18, t. IV, pp. 134.10-136.17.

55 Cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), p. 247.

56 Proclo cita Menelao a pp. 345.13-346.13, riportando la sua dimostrazione diretta della prop. 25 del libro I che invece Euclide conduce per assurdo. Sull'opera di Menelao da cui Proclo trae questa dimostrazione, cf. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), pp. 260-1.

genialità sta dunque nell'avere compreso – fosse anche in modo vago e implicito – che il quinto postulato non è universale e che richiedere al lettore o allo studente di accettare che la superficie su cui costruire le figure sia quella piana è esattamente la stessa cosa che chiedergli di accettare l'enunciato del quinto postulato benché indimostrabile. Ciò dimostra, inoltre, che la scoperta delle geometrie non euclidee, che ha costituito in fondo la soluzione al problema della dimostrabilità o meno del quinto postulato, non è moderna ma antica, e che dunque questa soluzione si trovava in germe già nella matematica greca.

4. La definizione di rette parallele

Il gruppo di proposizioni con cui si aprono gli *Elementi* è chiamato "definizioni" (ὅροι).[57] Ognuna di queste proposizioni può definire un solo ente geometrico[58] o più di uno. Dunque, è possibile numerare le definizioni o considerandole sempre come uniche, anche quando definiscono più enti, o contando i singoli enti geometrici definiti e attribuendo, dunque, più di un numero alla stessa proposizione quando essa definisce più enti. In base al primo criterio, adottato nell'edizione Heiberg-Stamatis, le definizioni che aprono il primo libro sono 23; in base al secondo, adottato da Friedlein per l'edizione del *Commento* di Proclo,[59] esse sono 35.[60]

La definizione delle rette parallele è l'ultima definizione del primo libro degli *Elementi*: essa è dunque la definizione 23 nell'ed. Heiberg-Stamatis (p. 4.10-12), la definizione 35 nell'ed. Friedlein (p. 191.16-20). Il commento di Proclo a questa definizione è essenziale per comprendere il problema del quinto postulato: Proclo spiega che il fatto che due linee non si incontrino mai non le rende *ipso facto* parallele; inoltre, per quanto il costante avvicinarsi di due linee possa far sembrare inevitabile il loro incontrarsi, esistono alcuni tipi di linee per cui questo non accade. Non è scontato, dunque, che due linee che si avvicinano si incontrino. Dati questi presupposti, l'errore di Euclide, secondo Proclo, è ancora più grave: non solo ha postulato qualcosa che *avrebbe potuto* dimostrare (cioè ha postulato un teorema), ma ha postulato qualcosa che è solo apparentemente evidente. L'apparente banalità del fatto che due linee che si avvicinano progressivamente si incontrano può essere confutata con dei controesempi. Questo, secondo Proclo, rende la dimostrazione del quinto postulato non solo possibile, ma addirittura necessaria.

Proclo, *In Eucl.*, pp. 175.1-177.27

Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Τίνα μὲν στοιχεῖα τῶν παραλλήλων καὶ τίσι γνωρίζονται συμπτώμασιν ἐν τοῖς μετὰ ταῦτα μαθησόμεθα, τίνες δέ εἰσιν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι διὰ τούτων ἀφορίζεται τῶν ῥημάτων. δεῖ τοίνυν

[57] Sulle differenze terminologiche tra Euclide e Proclo, cf. *infra*, Appendice A, n. 217.

[58] Per esempio la definizione 7: cf. *supra*, n. 32.

[59] Il ms. principale di Proclo, M (cf. *supra*, n. 12), segnala i lemmi delle definizioni usando la διπλῆ (come sempre per i lemmi citati da Euclide), senza alcuna numerazione. Anche Barozzi, nella sua traduzione del *Commento* di Proclo (Barozzi, *Procli Diadochi Lycii* [*supra*, n. 12]), distingue i singoli enti geometrici considerati all'interno della stessa definizione, separandoli anche graficamente l'uno dall'altro.

[60] La definizione a partire dalla quale le due numerazioni divergono è quella del semicerchio e del suo centro: cf. *Elem.* I, def. 18, t. I, p. 3.5-8 e *In Eucl.*, p. 158.21-25 (def. 18-19).

αὐτάς, φησίν, ἔν τε ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ ἐκβαλλομένας ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἀλλ᾽ ἐκβάλλεσθαι εἰς ἄπειρον. καὶ γὰρ αἱ μὴ παράλληλοι μέχρι τινὸς ἐκβαλλόμεναι μείναιεν ἂν ἀσύμπτωτοι, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν χαρακτηρίζει[(a)] τὰς παραλλήλους, καὶ οὐδὲ τοῦτο ἁπλῶς, ἀλλὰ τὸ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκβάλλεσθαι ἐπ᾽ ἄπειρον καὶ μὴ συμπίπτειν. καὶ γὰρ τῶν μὴ παραλλήλων δυνατὸν κατὰ θάτερα μὲν τὴν ἐκβολὴν ἐπ᾽ ἄπειρον γενέσθαι, κατὰ τὰ λοιπὰ δὲ οὔ· συννεύουσαι γὰρ ἐπὶ τάδε τὰ μέρη, πλέον ἀφίστανται ἀλλήλων κατὰ τὰ ἕτερα. τὸ δὲ αἴτιον, ὅτι δύο εὐθεῖαι περιέχειν οὐ δύνανταί τι χωρίον· εἰ δὲ κατὰ ἀμφότερα συννεύσαιεν,[(b)] τοῦτο συμβήσεται. καὶ μέντοι καὶ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι τὰς εὐθείας ὀρθῶς προσείληπται· εἰ γὰρ ἡ μὲν εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἡ δὲ ἐν μετεώρῳ, κατὰ πᾶσαν θέσιν ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἀλλήλαις καὶ οὐ διὰ τοῦτο παράλληλοί εἰσιν. [p. 176] ἓν οὖν ἔστω τὸ ἐπίπεδον καὶ ἐκβαλλέσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον κατὰ ἀμφότερα καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ μηδέτερα. τούτων γὰρ ὑπαρχόντων ἔσονται παράλληλοι εὐθεῖαι.

Καὶ ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ὁρίζεται τὸν τρόπον τὰς παραλλήλους εὐθείας, ὁ δὲ Ποσειδώνιος, παράλληλοι, φησίν, εἰσὶν αἱ μήτε συννεύουσαι[(c)] μήτε ἀπονεύουσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἀλλ᾽ ἴσας ἔχουσαι πάσας τὰς καθέτους τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν τῆς ἑτέρας σημείων ἐπὶ τὴν λοιπήν. ὅσαι δ᾽ ἂν ἐλάττους ἀεὶ ποιῶσι τὰς καθέτους συννεύουσιν[(d)] ἀλλήλαις· ἡ γὰρ κάθετος τά τε ὕψη τῶν χωρίων καὶ τὰ διαστήματα τῶν γραμμῶν ὁρίζειν δύναται. διόπερ ἴσων μὲν τῶν καθέτων οὐσῶν ἴσα τὰ διαστήματα τῶν εὐθειῶν, μειζόνων δὲ καὶ ἐλαττόνων γινομένων καὶ ἡ ἀπόστασις ἐλασσοῦται καὶ συννεύουσιν[(e)] ἀλλήλαις ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ κάθετοι ἐλάσσονες. δεῖ[(f)] δὲ εἰδέναι ὅτι τὸ ἀσύμπτωτον οὐ πάντως παραλλήλους ποιεῖ τὰς γραμμάς – καὶ γὰρ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων αἱ περιφέρειαι οὐ συμπίπτουσιν – ἀλλὰ δεῖ καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον αὐτὰς ἐκβάλλεσθαι. τοῦτο δὲ οὐ μόναις ὑπάρχει ταῖς εὐθείαις, ἀλλὰ καὶ ἄλλαις γραμμαῖς. δυνατὸν γὰρ νοῆσαι τεταγμένας ἕλικας περὶ εὐθείας γραφομένας, αἵτινες συνεκβαλλόμεναι ταῖς εὐθείαις εἰς ἄπειρον οὐδέποτε συμπίπτουσι.

Ταῦτα[(g)] μὲν οὖν περὶ τούτων. Ὀρθῶς <δὲ> Γεμῖνος διεῖλεν[(h)] ἐξ ἀρχῆς ὅτι τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν ὡρισμέναι καὶ [p. 177] σχῆμα περιέχουσιν, ὡς ὁ κύκλος καὶ ἡ τῆς ἐλλείψεως γραμμὴ καὶ ἡ κισσοειδὴς καὶ ἄλλαι παμπληθεῖς, αἱ δὲ ἀόριστοι καὶ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, ὡς ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ καὶ ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου καὶ ἡ κογχοειδής. Πάλιν δὲ αὖ τῶν[(i)] εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων αἱ μὲν οὐδὲν σχῆμα περιλαμβάνουσιν, ὡς ἡ εὐθεῖα καὶ αἱ κωνικαὶ τομαὶ αἱ εἰρημέναι, αἱ δὲ συνελθοῦσαί τε καὶ ποιήσασαι σχῆμα ἐπ᾽ ἄπειρον τὸ λοιπὸν ἐκφέρονται. τούτων δὲ αἱ μέν εἰσιν ἀσύμπτωτοι αἵ, ὅπως ποτ᾽ ἂν ἐκβληθῶσιν, μὴ συμπίπτουσαι, συμπτωταὶ δὲ αἵ ποτε συμπεσούμεναι. τῶν δὲ ἀσυμπτώτων αἱ μὲν ἐν ἑνί εἰσιν ἀλλήλαις ἐπιπέδῳ, αἱ δὲ οὔ. τῶν δὲ ἀσυμπτώτων καὶ ἐν ἑνὶ οὐσῶν ἐπιπέδῳ αἱ μὲν ἴσον ἀεὶ διάστημα ἀφεστήκασιν ἀλλήλων, αἱ δὲ μειοῦσιν ἀεὶ τὸ διάστημα, ὡς ὑπερβολὴ πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ ἡ κογχοειδὴς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. αὗται γὰρ ἀεὶ ἐλασσουμένου τοῦ διαστήματος ἀεὶ ἀσύμπτωτοί εἰσιν καὶ συννεύουσι[(j)] μὲν ἀλλήλαις, οὐδέποτε δὲ συννεύουσι[(k)] παντελῶς, ὃ καὶ παραδοξότατόν ἐστιν ἐν γεωμετρίᾳ θεώρημα δεικνύον σύννευσιν[(l)] τινῶν γραμμῶν ἀσύνευστον. τῶν δὲ ἴσον ἀεὶ ἀπεχουσῶν διάστημα αἵ εἰσιν εὐθεῖαι μηδέποτε ἔλασσον ποιοῦσαι τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ παράλληλοί εἰσιν.

Τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τῆς Γεμίνου φιλοκαλίας εἰς τὴν τῶν προκειμένων ἐξήγησιν ἀνελεξάμεθα.

(a) χαρακτηρίζει M : χαρακτερίζει Friedlein ‖ (b) συννεύσαιεν scripsi : συνεύσαιεν M Friedlein ‖ (c) συννεύουσαι Edelstein-Kidd : συνεύουσαι M Friedlein ‖ (d) συννεύουσιν Edelstein-Kidd : συνεύουσιν M Friedlein ‖ (e) συννεύουσιν Edelstein-Kidd : συνεύουσιν M Friedlein ‖ (f) sine intermissione ego : ad δεῖ initium paragraphi statuit Friedlein ‖ (g) ad Ταῦτα initium paragraphi statui : sine intermissione Friedlein ‖ (h) Ταῦτα μὲν οὖν περὶ τούτων. Ὀρθῶς <δὲ> Γεμῖνος διεῖλεν Segonds : ταῦτα μὲν οὖν παρὰ τούτων ὀρθῶς Γεμῖνος διεῖλεν Friedlein ‖ (i) αὖ τῶν M : αὐτῶν Friedlein ‖ (j) συννεύουσι scripsi : συνεύουσι M Friedlein ‖ (k) συννεύουσι scripsi : συνεύουσι M Friedlein ‖ (l) σύννευσιν scripsi : σύνευσιν M Friedlein.

Rette parallele sono quelle che, essendo sullo stesso piano ed essendo prolungate[61] *all'infinito da entrambe le parti, non si incontrano in nessuna delle due.*

Quali siano gli elementi delle rette parallele e da quali proprietà si riconoscano lo apprenderemo successivamente, quali siano invece le rette parallele è definito con queste parole. Bisogna dunque che esse, dice [Euclide], siano su un unico piano e che venendo prolungate da entrambe le parti non si incontrino, ma si prolunghino all'infinito. Infatti, anche le rette non parallele, prolungate fino a un certo punto, potrebbero rimanere asintotiche,[62] mentre il non incontrarsi pur essendo prolungate all'infinito caratterizza le rette parallele, e non [le caratterizza] semplicemente questo, ma l'essere prolungate da entrambe le parti all'infinito e il non incontrarsi.[63] E infatti il prolungamento delle rette non parallele può avvenire all'infinito da una parte, ma non dall'altra: convergendo infatti da una parte, si allontanano sempre più dall'altra. E il motivo è che due rette non possono comprendere una superficie; se invece convergessero da entrambe le parti, questo accadrebbe. E certo anche il fatto che le rette siano sullo stesso piano è stato aggiunto correttamente: se infatti una si trova su un piano sottostante e l'altra su uno superiore, sono in ogni posizione asintotiche[64] e non per questo sono parallele. [p. 176] Sia dunque unico il piano e siano prolungate all'infinito da entrambe le parti e non si incontrino da nessuna delle due. Se si danno queste condizioni, saranno rette parallele.

Dunque, Euclide definisce le rette parallele in questo modo, mentre Posidonio dice sì[65] che le rette parallele sono le rette che non convergono né si allontanano su un unico piano,

[61] La traduzione "essendo prolungate" è preferibile a quella di Timpanaro Cardini: "situate nello stesso piano e prolungate" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 152), perché sottolinea la natura durativa del prolungamento all'infinito delle rette.

[62] Mi discosto qui dall'uso di "asintote" come aggettivo presente nella traduzione di Timpanaro Cardini: nel lessico matematico moderno esistono "gli asintoti" (sostantivo) o "le rette/curve asintotiche", non "le rette asintote". D'ora in poi uso gli aggettivi "asintotico" e "sintotico" per tradurre ἀσύμπτωτος e συμπτωτός, rispettivamente. L'uso è un po' diverso da quello moderno, in cui si preferisce, ad esempio, parlare del "comportamento asintotico" di una curva rispetto a un'altra o definire una retta "asintoto" di una curva dando per scontato che esse non si toccheranno mai. Poiché in Euclide, invece, l'infinito è solo potenziale (nel senso che quelle che Euclide chiama "rette" sono, in fondo, segmenti che possono essere prolungati all'infinito, cf. secondo postulato), due rette non parallele che non s'incontrano semplicemente perché non sono state prolungate abbastanza possono comunque essere dette asintotiche.

[63] Mi discosto dalle traduzioni di Morrow: "and not simply this, they are capable of indefinite extension in both directions without meeting" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 137) e di Timpanaro Cardini: "né questo soltanto, ma [il fatto] di essere prolungate all'infinito da ambedue le parti senza incontrarsi" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 152), che subordinano il secondo infinito al primo e legano logicamente la proprietà del non incontrarsi al prolungamento all'infinito. In realtà Proclo spiega che il prolungamento all'infinito delle rette non parallele è possibile, in generale, solo da un lato e non dall'altro: quando due rette si incontrano, la loro ἐκβολή da quella parte si arresta. Sembra più corretta, dunque, una traduzione coordinante: l'essere prolungate all'infinito da entrambe le parti (τὸ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκβάλλεσθαι) e il non incontrarsi (καὶ μὴ συμπίπτειν) sono entrambi caratteristiche delle parallele. Si veda anche p. 176.1-3, in cui Proclo fa la stessa distinzione, e p. 176.18-21.

[64] Cf. *supra*, n. 62.

[65] Si rende in questo modo la contrapposizione tra Euclide e Posidonio e l'ἀλλ᾽ di p. 176.8. È plausibile che ἀλλ᾽ serva ad esprimere l'idea che la parte precedente è comune ad Euclide e Posidonio, la successiva no. Il passo p. 176.5-17 corrisponde al fr. 197 Edelstein-Kidd. La definizione di parallele data da Euclide evidenzia solo il loro essere asintotiche. Tuttavia, esistono curve come le coniche o le concoidi che sono asintotiche pur non essendo parallele. La precisazione di Posidonio che le rette devono essere non solo complanari e asintotiche, ma anche sempre equidistanti è dunque necessaria. Sul rapporto tra questa definizione di Posidonio e il problema del quinto postulato, cf. I.G. Kidd, *Posidonius. II: The Commentary. (ii) Fragments 150-293*, Cambridge U.P., Cambridge 1988, pp. 707-10; I.G. Kidd, *Posidonius. III: The Translation of the Fragments*, Cambridge U.P., Cambridge 1999, p. 260.

ma [anche] che [sono quelle che] hanno uguali tutte le rette perpendicolari condotte dai punti dell'una sull'altra. Quelle che, invece, fanno le perpendicolari sempre minori si incontrano: la retta perpendicolare, infatti, può definire le altezze delle superfici e le distanze fra le linee.[66] Perciò se le perpendicolari sono uguali, le distanze tra le rette sono uguali; se invece diventano più grandi e più piccole, anche la distanza diminuisce e [le rette] convergono dalla parte in cui le perpendicolari sono più piccole. Bisogna poi sapere che il non incontrarsi non rende le linee[67] parallele in ogni caso – e infatti le circonferenze dei cerchi concentrici non s'incontrano –, ma bisogna anche che si prolunghino all'infinito.[68] Questa proprietà, tuttavia, non appartiene solo alle rette, ma anche ad altre linee. È infatti possibile pensare a spirali disegnate disposte intorno a rette, le quali, pur venendo prolungate all'infinito insieme con le rette, non le incontrano mai.

Riguardo a questo punto basta quanto si è detto. Gemino[69] ha ragione di fare la divisione seguente:[70] fra le linee (1) alcune sono limitate e [p. 177] comprendono una figura, come il cerchio e la linea dell'ellisse e la cissoide e altre numerosissime; (2) altre sono illimitate e si prolungano[71] all'infinito, come la retta e la sezione del cono rettangolo e quella del cono

[66] Si noti qui, ancora una volta, che Euclide utilizza il termine "retta" con il significato di "segmento"; sarebbe altrimenti impossibile comprendere in che modo una retta, implicitamente infinita, possa misurare distanze.

[67] Proclo utilizza, qui, il genere "linea" per mostrare che all'interno di questo genere esistono delle specie che hanno la proprietà di non incontrarsi e di non essere comunque parallele. Poiché anche le rette sono una specie del genere "linea", sarebbe possibile anche per esse non incontrarsi e non essere parallele; bisogna aggiungere, dunque, la proprietà specifica della prolungabilità all'infinito.

[68] Ancora una volta, Proclo non considera l'infinità come caratteristica intrinseca di una linea: due linee (si noti che qui Proclo sta generalizzando l'analisi a qualsiasi curva, cercando di dimostrare che tra queste solo le rette possono dirsi parallele) possono essere ἀσύμπτωτοι anche soltanto perché non sono state prolungate abbastanza, ma non per questo saranno parallele. L'esempio delle circonferenze concentriche è usato per la sua autoevidenza: essendo linee chiuse, è possibile studiarne il comportamento senza doverne inferire il comportamento "all'infinito". Qualsiasi lettore converrà che le circonferenze concentriche non sono parallele benché non si intersechino: se ne deduce che non basta il non intersecarsi perché due linee siano dette parallele. Il non intersecarsi, però, benché condizione non sufficiente, è condizione necessaria: sarà dunque essenziale prolungare le linee all'infinito e dimostrare che anche all'infinito non s'incontrano.

[69] Cf. *supra*, n. 18.

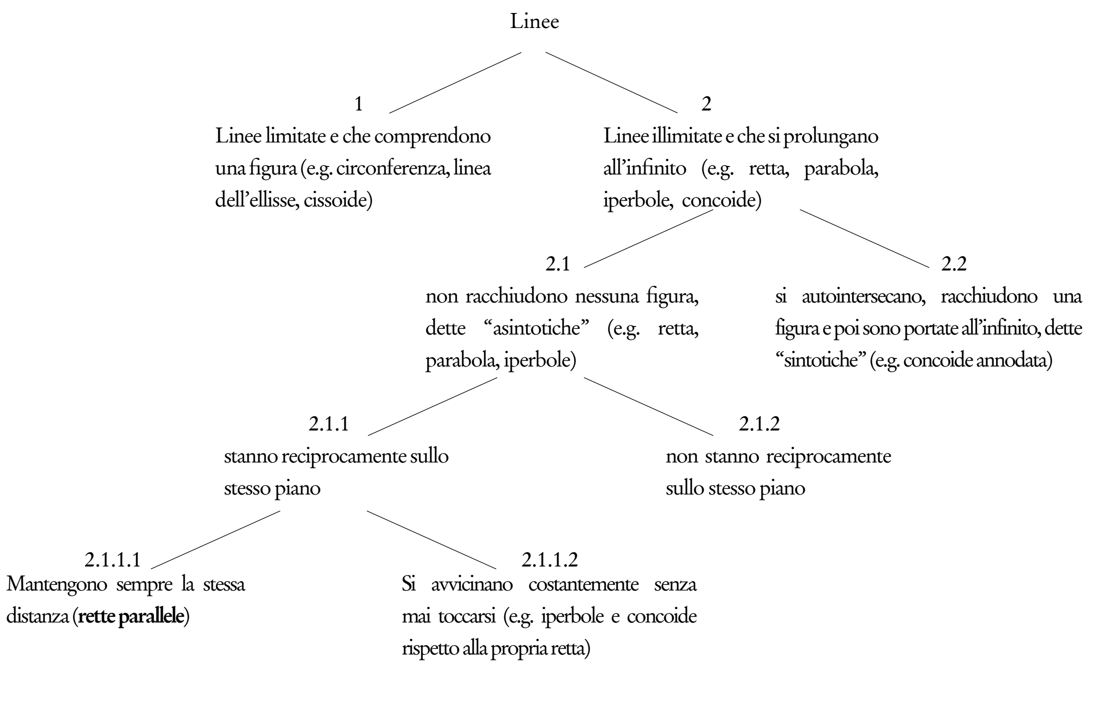
[70] Il testo Friedlein non fa senso e lo stesso editore inserisce un (?) per manifestare la sua perplessità. Si accoglie, dunque, la correzione di Alain Segonds che restituisce il sintagma Ταῦτα μὲν οὖν περὶ τούτων frequente in Proclo per chiudere una sezione e aprirne una nuova (in questo caso si passa dalla trattazione della definizione di Posidonio con conseguente commento alla distinzione di Gemino). Poco perspicue sia la traduzione di Morrow: "Such cases Geminus rightly distinguishes from the former ones at the outset" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 138) che quella di Timpanaro Cardini: "In considerazione di questi fatti Gemino con ragione distinse da principio che…" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 153), entrambe basate su un tentativo di interpretazione del testo Friedlein.

[71] Si rende in questo modo la sfumatura aspettuale del participio presente medio-passivo greco, assente in latino e in italiano. La traduzione tecnica di εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, "prolungate all'infinito", evoca contemporaneamente l'immagine di un'azione subita dalle rette, in quanto svolta dal geometra, e aspettualmente conclusa – valori semantici ereditati dal participio perfetto latino –; il testo greco, invece, fa qui riferimento ad un'azione media, dunque non subita, e durativa, dunque non conclusa, quale sarebbe stata invece quella espressa con un participio perfetto come βεβλημέναι. Poco chiara, pertanto, la traduzione di Morrow: "others are unlimited and *can be extended* indefinitely" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 138, corsivo mio) che cerca di rendere la duratività del participio con una potenzialità impossibile da ritrovare nel participio greco; fondamentalmente errata quella di Timpanaro Cardini: "altre sono illimitate e prolungate all'infinito" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 153) che, scontrandosi col valore perfettivo del participio passato italiano, non può conciliarsi con l'idea antica dell'infinità potenziale, mai attuale, degli enti geometrici.

ottusangolo e la concoide. A loro volta, poi, di quelle che si prolungano all'infinito,[72] (2.1) alcune non racchiudono nessuna figura, come la retta e le sezioni coniche menzionate, (2.2) altre, dopo essersi autointersecate e aver creato una figura,[73] sono portate[74] all'infinito per la parte restante. Di queste, (2.1) le asintotiche sono le linee che, per quanto siano prolungate, non s'incontrano, (2.2) le sintotiche quelle che a un certo punto si incontreranno. Fra quelle asintotiche, poi, (2.1.1) alcune stanno sullo stesso piano l'una con l'altra, (2.1.2) altre no. Fra quelle asintotiche e che stanno nello stesso piano, (2.1.1.1) alcune hanno sempre la stessa distanza l'una dall'altra, (2.1.1.2) altre diminuiscono sempre la distanza [reciproca], come l'iperbole nei confronti della retta e la concoide nei confronti della retta. Queste, infatti, pur diminuendo sempre la distanza, sono sempre asintotiche e convergono sì l'una verso l'altra, ma non convergono mai del tutto, il che è anche un teorema assolutamente paradossale in geometria giacché mostra una convergenza non convergente di certe linee. Tra le linee (2.1.1.1) che mantengono sempre una distanza uguale l'una dall'altra, le rette che non rendono mai più piccola la distanza fra di loro sullo stesso piano sono parallele.

Questo abbiamo tratto dalla *philokalia*[75] di Gemino per la spiegazione del presente testo.[76]

La divisione delle linee secondo Gemino può essere sintetizzata in questo modo:



[72] Si accoglie la correzione di Alain Segonds che legge πάλιν δὲ αὖ τῶν anziché πάλιν δὲ αὐτῶν. πάλιν δὲ αὖ è locuzione molto frequente, soprattutto nelle divisioni: qui sottolinea il passaggio di Gemino alla divisione della seconda classe delle linee.

[73] Il riferimento potrebbe essere, ad esempio, alla concoide annodata.

[74] ἐκφέρονται (p. 177.9): è interessante il fatto che Proclo non usi più ἐκβάλλομαι per "prolungare", come se, dopo aver incontrato se stesse, le linee passassero a uno statuto diverso.

[75] Cf. *supra*, n. 18.

[76] Proclo fa riferimento a una situazione scolastica in cui l'allievo ha davanti a sé aperto anche il testo di Euclide: τὰ προκείμενα indica il lemma, il testo che è oggetto del commento presente.

5. La diretta: il quinto postulato

Seguendo l'ordine con cui le proposizioni vengono enunciate da Euclide, Proclo commenta l'enunciato del quinto postulato dopo i primi quattro. Tuttavia, in questo passo non affronta ancora diffusamente il problema della dimostrazione del postulato, ma si limita ad affermare che è dimostrabile (e dunque non appartiene ai postulati) e che questa dimostrazione è necessaria perché esistono linee che pur avvicinandosi all'infinito non si incontrano mai. La dimostrazione vera e propria viene differita a quando Euclide utilizzerà il quinto postulato come se fosse evidente. Ciò avverrà soltanto con la prop. 29, che è, in realtà, logicamente equivalente al quinto postulato.[77]

Proclo, *In Eucl.*, pp. 191.16-193.9

Pet. V *Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάττονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάττονες.*

Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων· θεώρημα γάρ ἐστι, πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον, ἃς καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἔν τινι βιβλίῳ διαλῦσαι προύθετο, πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων. καὶ τό γε ἀντιστρέφον [p. 192] καὶ ὁ Εὐκλείδης ὡς θεώρημα δείκνυσιν. ἴσως δὲ ἄν τινες ἀπατώμενοι καὶ τοῦτο τάττειν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἀξιώσειαν, ὡς διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῶν δύο ὀρθῶν αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον τῆς τῶν εὐθειῶν συννεύσεως[a] καὶ συμπτώσεως. πρὸς οὓς ὁ Γεμῖνος ὀρθῶς ἀπήντησε λέγων ὅτι παρ' αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις εἰς τὴν τῶν λόγων [τῶν][b] ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχήν. ὅμοιον γάρ φησι καὶ Ἀριστοτέλης *ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν καὶ γεωμέτρου πιθανολογοῦντος ἀνέχεσθαι,*[c] καὶ ὁ παρὰ τῷ Πλάτωνι Σιμμίας ὅτι "*τοῖς ἐκ τῶν εἰκότων τὰς ἀποδείξεις ποιουμένοις σύνοιδα οὖσιν ἀλαζόσι*". κἀνταῦθα τοίνυν τὸ μὲν ἠλαττωμένων τῶν <δύο>[d] ὀρθῶν συννεύειν[e] τὰς εὐθείας ἀληθὲς καὶ ἀναγκαῖον, τὸ δὲ συννευούσας[f] ἐπὶ πλέον ἐν τῷ ἐκβάλλεσθαι συμπεσεῖσθαί ποτε πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μή τις ἀποδείξειεν λόγος ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τοῦτο ἀληθές. τὸ γὰρ εἶναί τινας γραμμὰς συννευούσας[g] μὲν ἐπ' ἄπειρον, ἀσυμπτώτους δὲ ὑπαρχούσας, καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστι καὶ πεφώραται ἐπ' ἄλλων εἰδῶν τῆς γραμμῆς. μήποτε οὖν τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν δυνατὸν ὅπερ ἐπ' ἐκείνων τῶν γραμμῶν. ἕως[h] γὰρ ἂν δι' ἀποδείξεως αὐτὸ καταδησώμεθα, περισπᾷ τὴν φαντασίαν τὰ ἐπ' ἄλλων δεικνύμενα γραμμῶν. εἰ δὲ καὶ οἱ διαμφισβητοῦντες λόγοι πρὸς τὴν σύμπτωσιν πολὺ τὸ πληκτικὸν ἔχοιεν, πῶς οὐχὶ πολλῷ πλέον ἂν[i] τὸ πιθανὸν τοῦτο καὶ τὸ ἄλογον ἐκβάλλοιμεν τῆς ἡμετέρας παραδοχῆς;

[p. 193] Ἀλλ' ὅτι μὲν ἀπόδειξιν χρὴ ζητεῖν τοῦ προκειμένου θεωρήματος δῆλον ἐκ τούτων, καὶ ὅτι τῆς τῶν αἰτημάτων ἐστὶν ἀλλότριον ἰδιότητος, πῶς δὲ ἀποδεικτέον αὐτὸ καὶ διὰ ποίων λόγων ἀναιρετέον τὰς πρὸς αὐτὸ φερομένας ἐνστάσεις, τηνικαῦτα λεκτέον, ἡνίκα ἂν καὶ ὁ στοιχειωτὴς αὐτοῦ μέλλῃ ποιεῖσθαι μνήμην ὡς ἐναργεῖ προσχρώμενος· τότε γὰρ ἀναγκαῖον αὐτοῦ δεῖξαι τὴν ἐνάργειαν οὐκ ἀναποδείκτως προφαινομένην ἀλλὰ δι' ἀποδείξεων γνώριμον γιγνομένην.

(a) συννεύσεως scripsi : συνεύσεως M Friedlein || (b) τῶν del. Luna || (c) ἀνέχεσθαι codd. Friedlein, teste Iambl., *De com. math. sc.* XXVII, p. 86.5 Festa : ἀποδέχεσθαι Arist. et supra, p. 34.1 || (d) δύο addidi || (e) συννεύειν scripsi : συνεύειν M Friedlein || (f) συννευούσας scripsi : συνευούσας M Friedlein || (g) συννευούσας scripsi : συνιούσας M Friedlein || (h) γραμμῶν. ἕως interpunxi : γραμμῶν; ἕως Friedlein || (i) πλέον ἂν M Friedlein : an πλέον <λάβοιμεν> ἂν vel πλέον <συγχωροῖμεν> ἂν scribendum?

---

[77] Infatti, preso il quinto postulato come proposizione diretta, la prop. 29 ne costituisce la contronominale; cf. *infra*, pp. 59-73 e Appendice B, pp. 81-2.

Postulato V

E che quando una retta, cadendo su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le rette,[78] *prolungandosi illimitatamente, si incontrano dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti.*

Questo dev'essere cancellato[79] del tutto dai postulati perché è un teorema che presenta molte difficoltà, che anche Tolomeo si è proposto di risolvere in un [suo] libro,[80] e richiede molte definizioni e teoremi per la sua dimostrazione, senza contare che proprio Euclide dimostra l'inversa [p. 192] come teorema.[81] Ma forse alcuni, ingannandosi, potrebbero ritenere corretto inserire anche questo tra i postulati, in quanto, a causa della diminuzione dei due retti, fornisce immediatamente la persuasione che le rette si avvicinano e si incontrano. Contro questi [autori] Gemino ha sollevato un'obiezione corretta dicendo che abbiamo appreso dai maestri stessi di questa scienza a non prestare molta attenzione a rappresentazioni persuasive[82] per accogliere le proposizioni nella geometria. Anche Aristotele, infatti, dice che [sarebbe] lo stesso *chiedere dimostrazioni a un retore e tollerare un geometra che fa ragionamenti persuasivi*,[83] e il Simmia di Platone [dice]: *so bene che coloro che fanno dimostrazioni*[84] *a partire da cose verosimili sono dei ciarlatani.*[85] Anche qui, dunque, il fatto che, essendo diminuiti i <due> retti, le rette si avvicinano è vero e necessario, ma il fatto che avvicinandosi sempre più nell'essere prolungate si incontrino a un certo punto è persuasivo, ma non è necessario, a meno che un ragionamento non dimostri che questo è vero nel caso delle rette.

---

[78] Per l'omissione di δύο, che invece si trova in alcuni ms. di Euclide, cf. *In Eucl.*, p. 183.1. Specificare che ci si sta riferendo solo alle due rette tagliate dalla trasversale serve per chiarire che sono solo queste due a essere prolungate, non tutte e tre. Tuttavia, nel testo di Euclide, p. 5.6, δύο è omesso anche dal ms. F e, secondo Heiberg, questa lezione (cioè l'omissione) è probabilmente preferibile: "τὰς δύο PBVbp : δύο om. F Procl. bis, Mart. Cap., Boet., fort. recte" (app. crit. *ad loc.*). I due passi del commento di Proclo cui Heiberg fa riferimento in apparato sono appunto questo e p. 183.1.

[79] L'uso di διαγράφω in questo senso nasce dalla pratica di cancellare le parole tracciandovi una linea attraverso (cf. *LSJ s.v.*).

[80] Cf. *supra*, n. 21.

[81] Proclo fa riferimento alla prop. 17, su cui cf. *infra*, pp. 37-47.

[82] Proclo fa uso, qui, di una terminologia di matrice stoica: cf. Crisippo, SVF II 65 (divisione esaustiva delle φαντασίαι πιθαναί e ἀπίθανοι).

[83] Cf. Arist., *Eth. Nic.* I 3, 1094 b 25-27: παραπλήσιον γὰρ φαίνεται μαθηματικοῦ τε πιθανολογοῦντος ἀποδέχεσθαι καὶ ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν. La stessa citazione si trova anche nel primo prologo (pp. 33.24-34.1): Proclo sottolinea che è necessario che le dimostrazioni dei matematici siano fondate su ragioni necessarie e irrefutabili, non su argomenti persuasivi e probabili. La fonte di Proclo, *In Eucl.*, pp. 32.21-34.19 è il cap. 27 del *De communi mathematica scientia* di Giamblico; è dunque molto probabile che, anche a p. 192.9-11, la citazione aristotelica sia tratta da Giamblico. Proclo fa allusione a questo passo di Aristotele anche in *In Tim.* III, p. 63.20-21 Diehl: ἀλλὰ τῶν μὲν μαθηματικῶν οὐ πολὺς λόγος πιθανολογούντων.

[84] Nel testo di Platone si parla, in realtà, di ποιουμένοις λόγοις, ovvero di "ragionamenti che fanno le dimostrazioni". Se Proclo non legge λόγοις, allora τοῖς [...] ποιουμένοις (p. 192.12-13) sono "coloro che fanno", cioè persone e non ragionamenti. Anche la citazione aristotelica, tra l'altro, parla di persone (il retore, il geometra), ed è dunque molto verosimile che anche la citazione platonica parli di persone e non di argomenti; cf. le traduzioni di Morrow: "those who make proofs out of probabilities are impostors" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 151) e di Timpanaro Cardini: "quelli che fanno delle dimostrazioni fondandole su casi somiglianti sono degl'impostori" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 164). L'altra possibilità è che λόγοις sia stato omesso nella tradizione manoscritta dell'*In Eucl.* Ma questa ipotesi è difficilmente verificabile sia perché il testo senza λόγοις è perfettamente corretto, sia perché, non essendo attestate altre citazioni di questo passo del *Fedone*, è impossibile stabilire se l'omissione di λόγοις sia un errore di trasmissione del testo dell'*In Eucl.* oppure una lezione tardo-antica.

[85] Cf. Plat., *Phaed.* 92 D 2-4.

Infatti, che ci siano alcune rette che si avvicinano illimitatamente ma sono asintotiche, benché sembri essere non persuasivo e paradossale, è tuttavia vero ed è stato scoperto riguardo ad altre specie di linea.[86] Forse, dunque, ciò che è possibile nel caso di quelle linee lo è anche nel caso delle rette. Infatti, finché non l'avremo stabilito fermamente attraverso una dimostrazione,[87] ciò che viene dimostrato nel caso delle altre rette attrae l'immaginazione.[88] E se poi i ragionamenti che si oppongono all'intersezione [delle due rette] avessero qualcosa di molto impressionante, come non <accoglieremmo>[89] a molto maggior ragione questo argomento persuasivo e respingeremmo l'irrazionalità della nostra ammissione?

[p. 193] Che sia necessario cercare una dimostrazione del teorema[90] in questione è evidente da quanto si è detto, e così pure che esso è estraneo alla proprietà dei postulati. Ma in che modo esso debba essere dimostrato e con quali ragionamenti debbano essere eliminate le obiezioni sollevate contro di esso bisognerà discuterlo quando anche l'autore degli *Elementi* ne farà menzione utilizzandolo come evidente: a quel punto, infatti, sarà necessario dimostrare che la sua evidenza non appare senza dimostrazione, ma diventa conoscibile attraverso delle dimostrazioni.[91]

6. L'inversa: la proposizione 17

Dopo le definizioni (ὅροι), i postulati (αἰτήματα) e le nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι), che fungono da principi comuni per l'intera opera, il primo libro degli *Elementi* prosegue con le proposizioni *stricto sensu*: legate l'una all'altra da una ferrea concatenazione logica, si susseguono puntando alla dimostrazione del teorema di Pitagora con cui il primo libro si conclude (prop. 47 e prop. 48, l'inversa[92] del teorema di Pitagora). Il testo di Euclide, in realtà, non presenta un termine univoco con cui indicare questi enunciati: nei manoscritti e nell'edizione Heiberg-Stamatis, ogni proposizione è indicata semplicemente con un numerale progressivo, α′, β′, γ′ etc. In alcuni casi, nel corso delle dimostrazioni lo stesso Euclide si riferisce ad essi come "teoremi".[93] In altri casi, Euclide utilizza il termine πρότασις con il

---

[86] Per esempio, l'iperbole e la concoide con le rispettive rette: cf. p. 177.13-21.

[87] *Scil.* finché non avremo dimostrato che due rette che si avvicinano si intersecano.

[88] Proclo vuole dire che finché non è stato stabilito mediante dimostrazione che le rette che si avvicinano si incontrano, la proprietà delle linee asintotiche attrae, attira (περισπᾷ) l'immaginazione, che quindi viene persuasa ad attribuire alle linee rette una proprietà di alcune linee non-rette.

[89] Non sembra che ci sia modo di rendere coerenti fra loro τὸ πιθανὸν τοῦτο e τὸ ἄλογον. Le traduzioni di Heath: "this merely plausible and unreasoned (*hypothesis*)" (Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 [*supra*, n. 14], p. 228), Morrow: "this unreasoned appeal to probability" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 151) e Timpanaro Cardini: "questo fatto, probabile sì, ma irrazionale" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 165) stravolgono la lettera del testo non riuscendo comunque a dare un senso accettabile. Le due espressioni devono probabilmente essere complementi oggetto di due verbi distinti, uno con il significato di accettare, assente dal testo, e uno con quello di respingere. Pur senza accoglierlo nel testo, si propone in apparato un possibile esempio di integrazione in questo senso.

[90] Si noti che Proclo parla di προκειμένου θεωρήματος e non di προκειμένου αἰτήματος. Sull'importanza della terminologia (e quindi della necessità di definire il quinto postulato preliminarmente come λῆμμα), cf. *infra*, pp. 73-4.

[91] Il riferimento è a pp. 354.1-373.2.

[92] Sulla struttura della proposizione inversa e sul suo rapporto con la proposizione diretta, cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

[93] Cf. *Elem.* VIII, prop. 19, t. II, p. 177.14-15: ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη; XII, prop. 2, t. IV, p. 82.1-2: ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι κτλ.; XIII, prop. 17, t. IV, p. 178.16-17: τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου.

senso di "proposizione", "enunciato", ma sempre facendo riferimento alla formulazione della proposizione che sta dimostrando, che viene richiamata con finalità conclusiva e riassuntiva, per non ripeterla interamente alla fine della dimostrazione.[94] Ogni proposizione degli *Elementi* può essere un teorema o un problema:[95] è un teorema se enuncia proprietà, un problema se spiega come fare una costruzione. Il libro IV degli *Elementi*, per esempio, è composto unicamente da problemi riguardanti poligoni regolari.

L'oscillazione terminologica di Euclide spiega anche l'uso ambiguo di Proclo, che pur distingue i due tipi di proposizione. Infatti, all'inizio del commento della prop. 4 Proclo distingue chiaramente tra teoremi e problemi: Τοῦτο **πρῶτον θεώρημα** ἐν τῇ στοιχειώσει παρειλήφαμεν, **τὰ δὲ πρὸ τούτου πάντα προβληματικὰ ἦν** (p. 233.11-12). Secondo la distinzione in teoremi e problemi delle prime quattro proposizioni, le prime tre sono problemi[96] – anche se già gli antichi si interrogavano sul loro statuto reale (proposizioni o postulati?) –, mentre la quarta è il primo vero teorema.[97] In alcuni casi, Proclo utilizza, come Euclide, il termine πρότασις nel senso generico di "proposizione", "enunciato".[98] Altrove e più spesso, però, Proclo chiama θεώρημα una proposizione *tout court*: commentando la prop. 15, per esempio, Proclo dice τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματος (p. 299.8) riferendosi, ovviamente, alla prop. 13 (che coincide con il sesto teorema), non alla proposizione che coincide con il tredicesimo teorema *stricto sensu*, cioè la prop. 20. Ugualmente, commentando l'enunciato della prop. 16, Proclo fa un paragone ricordando ciò che è stato fatto ἐν τῷ πέμπτῳ θεωρήματι (p. 306.3) intendendo, però, la prop. 5 (che è il secondo teorema) e non la prop. 8, che sarebbe il "quinto teorema" secondo la numerazione che oppone proposizioni-teoremi e proposizioni-problemi.

In base a queste considerazioni, ho scelto di non utilizzare la doppia numerazione delle proposizioni (una comune e una che distingue tra teoremi e problemi) che si trova, invece, nella traduzione latina di Barozzi,[99] nell'edizione di Friedlein e nella traduzione di Timpanaro Cardini: per quanto Proclo distinguesse tra teoremi e problemi, infatti, l'oscillazione nell'uso di θεώρημα dimostra che separare nettamente proposizioni-problemi e proposizioni-teoremi nel suo commento rischia di essere una forzatura del testo, come è dimostrato dal

---

[94] Cf. *Elem.* XI, prop. 35, t. IV, p. 69.15-16: Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως; XI, prop. 37, t. IV, p. 73.10-11: Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[95] Proclo analizza questa distinzione nel secondo prologo, pp. 77.7-81.22.

[96] Cf. *Elem.* I, prop. 1, t. I, p. 7.1-2: Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι, "Sulla retta limitata data costruire un triangolo equilatero"; *Elem.* I, prop. 2, t. I, p. 8.11-12: Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι, "Porre su un punto dato una retta uguale a una retta data"; *Elem.* I, prop. 3, t. I, p. 9.16-17: Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν, "Date due rette diseguali, sottrarre dalla retta maggiore una retta uguale alla minore".

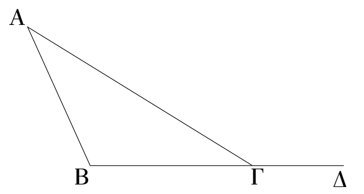
[97] Cf. *Elem.* I, prop. 4, t. I, p. 10.11-16: Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, "Se due triangoli hanno rispettivamente due lati uguali a due lati e [ciascuno] ha l'angolo compreso dai lati [rispettivamente] uguali uguale [a quello dell'altro], avrà anche la base uguale alla base, e un triangolo sarà uguale all'altro, e gli angoli restanti saranno rispettivamente uguali agli angoli restanti che sono sottesi da lati uguali". Nella matematica moderna questo teorema è conosciuto come "primo criterio di congruenza" (cf. *infra*, Appendice B, p. 82).

[98] Cf. per esempio p. 306.9: Τί δ' οὖν φησιν ἡ πρότασις ὅτι παντὸς τριγώνου κτλ. (con riferimento alla prop. 16).

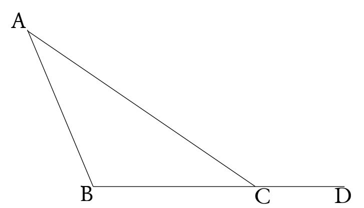
[99] Cf. Barozzi, *Procli Diadochi Lycii* (*supra*, n. 12).

fatto che i manoscritti non presentano alcuna numerazione nel testo e soltanto, talvolta, una numerazione marginale progressiva non accompagnata da alcun sostantivo. È dunque meglio, nell'indicare il lemma euclideo nel commento di Proclo, limitarsi ad una numerazione crescente – che ricalca l'uso euclideo – come fa Morrow oppure utilizzare la generica e ormai condivisa denominazione di "proposizione".

La prop. 17 ha uno statuto speciale all'interno del primo libro. Innanzitutto, essa può ricavarsi come corollario a partire dalla proposizione precedente, detta "teorema dell'angolo esterno maggiore": Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν (*Elem.* I, prop. 16, t. I, p. 24.15-17), "Prolungato uno dei lati di qualsiasi triangolo, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei [due] angoli interni e opposti". Che la prop. 17 derivi logicamente dalla prop. 16 è chiaro dalla dimostrazione stessa della prop. 17 fornita da Euclide in *Elem.* I, prop. 17, t. I, p. 26.4-18:



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Sia ABC un triangolo; dico che la [somma di] due angoli del triangolo ABC, comunque siano presi, è minore di due retti. Infatti, sia prolungato BC fino a D. Poiché l'angolo ACD è un angolo esterno del triangolo ABC, esso è maggiore dell'angolo interno e opposto ABC. Sia aggiunto in comune [sia all'uno che all'altro angolo] l'angolo ACB: dunque, la [somma degli angoli] ACD e ACB è più grande della [somma degli angoli] ABC e BCA. Ma la [somma degli angoli] ACD e ACB è uguale a due retti: dunque, la [somma degli angoli] ABC e BCA è minore di due retti. Similmente dimostreremo che anche la [somma degli angoli] BAC e ACB è minore di due retti e anche [quella degli angoli] CAB e ABC. Dunque, la [somma di] due angoli di ogni triangolo, comunque siano presi, è minore di due retti: come si doveva dimostrare.

Nella dimostrazione della prop. 17, come si è visto, vengono utilizzati il secondo postulato (prolungamento di BC fino a D), la prop. 13 (la somma di due angoli supplementari è uguale a due retti)[100] e soprattutto la prop. 16. In realtà, sia la prop. 16 che la prop. 17 potrebbero essere facilmente ricavate dalla prop. 32 che afferma la nota proprietà dei triangoli di avere la somma dei tre angoli interni equivalente a due retti (ovvero, in termini moderni, in ogni triangolo $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). La prop. 32 è al contempo un ampliamento della prop. 17 (infatti, non solo la

[100] Cf. *infra*, n. 116.

somma di *due* angoli qualsiasi è *minore* di due retti, ma la somma di tutti e *tre* insieme è *uguale* a due retti) e della prop. 16 (infatti, non solo l'angolo esterno è *maggiore dei due interni* non adiacenti ad esso presi *singolarmente*, ma è *uguale alla loro somma*). Che senso ha, dunque, inserirle come proposizioni, dal momento che la prop. 32 le comprende e le supera entrambe?[101]

A queste considerazioni si aggiunge un'ulteriore difficoltà. La prop. 16 viene utilizzata per dimostrare altre proposizioni prima della prop. 32, e in particolare le fondamentali prop. 27 e 28, che costituiscono il cosiddetto "teorema diretto delle parallele";[102] la prop. 17, invece, non viene mai utilizzata per dimostrare le proposizioni intermedie tra la prop. 17 stessa e la prop. 32. Come si è visto, caratteristica precipua del primo libro degli *Elementi* è la strettissima concatenazione logica delle proposizioni, che si susseguono dimostrandosi ognuna a partire da una o più precedenti fino ad arrivare alle prop. 47 e 48, il teorema di Pitagora e la sua inversa. In questo sistema dominato dalla presenza esclusiva di ciò che è strettamente necessario alla costruzione dell'impalcatura logico-proposizionale, la presenza di una proposizione "inutile" come la prop. 17 è sorprendente.

Una spiegazione plausibile per l'inserimento di questa proposizione è la seguente: consapevole della "delicatezza" assiomatica del quinto postulato, Euclide ha voluto evitare di utilizzarlo finché non fosse strettamente necessario, ovvero fino alla formulazione della prop. 29. Poiché la proposizione sulla somma degli angoli di un triangolo (prop. 32) richiede il quinto postulato, Euclide ha tentato di avvicinarsi quanto più possibile a un teorema sugli angoli del triangolo senza farne uso, ottenendo così la diseguaglianza (che coinvolge due angoli anziché tre) della prop. 17; solo dopo il blocco di proposizioni 27-28-29, arresosi ormai all'uso del quinto postulato, ha dimostrato il teorema vero e proprio nella prop. 32.

Secondo Frajese, c'è almeno un altro motivo per cui Euclide ha inserito la prop. 17: essa è l'inversa del quinto postulato.[103] In questo caso, data la **diretta** (= quinto postulato) "Se due rette, tagliate da una trasversale, hanno la somma degli angoli da una parte minore di due retti [ipotesi], esse si incontrano da quella parte [tesi]", l'**inversa** (= prop. 17) sarà "Se due rette si incontrano [tesi del postulato], essendo tagliate da una terza, gli angoli dal lato dell'intersezione saranno minori di due retti [ipotesi del postulato]".[104] È evidente che questo equivale a dire che in un triangolo la somma di due angoli qualsiasi è minore di due retti. Perciò, secondo Frajese, se si togliesse dal primo libro la prop. 17, apparentemente inutile, verrebbe a mancare una delle quattro possibilità logiche di combinazione tra ipotesi, tesi e rispettive negazioni che costituiscono un quadrato di proposizioni.

Un'ultima osservazione: il tentativo di Euclide di spingere il più lontano possibile le proprie dimostrazioni circa la somma degli angoli di un triangolo senza usare il quinto postulato non è rimasto senza continuatori. Ad oggi si è dimostrato che il massimo risultato a cui si può arrivare è quello del teorema Saccheri-Legendre. Esso fu formulato compiutamente da Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matematico francese allievo di Eulero e Lagrange, sulla base dei risultati ottenuti un secolo prima da Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) nel suo *Euclides ab omni naevo vindicatus*.[105] Il teorema Saccheri-Legendre afferma che la somma degli angoli interni di un

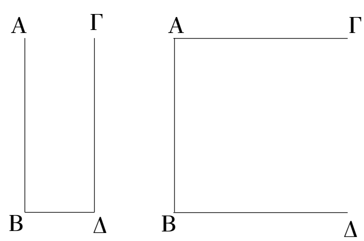
[101] Su quest'argomento, cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), pp. 61-3, 100-4.
[102] Cf. *infra*, pp. 47-59.
[103] Cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 103.
[104] Cf. *infra*, Appendice B, p. 81.
[105] Cf. *supra*, n. 10.

triangolo è *al massimo* 180°. Poiché questo teorema *non si basa sul quinto postulato*, esso fa parte della *geometria assoluta*, ovvero di quel sistema assiomatico che scaturisce solo dai primi quattro postulati di Euclide e dalle prop. 1-28 del primo libro degli *Elementi*. La geometria assoluta include la geometria euclidea e la geometria iperbolica, mentre è incompatibile con la geometria ellittica (e dunque anche con la geometria sferica). Corollario del teorema di Saccheri-Legendre è che l'esistenza di almeno un triangolo che ha somma degli angoli interni pari a 180° implica il quinto postulato e dunque la geometria euclidea, mentre l'esistenza di almeno un triangolo con somma degli angoli interni *minore* di 180° implica il postulato caratteristico della geometria iperbolica. Dunque, dato uno spazio geometrico compatibile con la geometria assoluta, la somma interna degli angoli di un triangolo in questo spazio è un criterio per stabilire la natura dello spazio in esame; per esempio, dato uno spazio geometrico incognito, basta dimostrare che un solo triangolo ha la somma degli angoli interni uguale a 180° per dimostrare che lo spazio geometrico è euclideo e che dunque anche tutti gli altri triangoli in quello spazio godono della stessa proprietà.

Proclo, *In Eucl.*, pp. 310.9-313.12

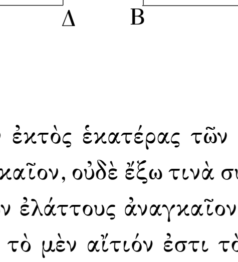
XVII *Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ*[a] *μεταλαμβανόμεναι.*

Νῦν μὲν ἀορίστως δείκνυνται δύο ὁποιαιοῦν τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονες· ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς καὶ ἀφορισθήσεται πόσῳ ἐλάττους, ὅτι τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου γωνίᾳ· αἱ γὰρ τρεῖς ἴσαι ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν, ὥστε αἱ δύο τῇ λοιπῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλαττοῦνται. καὶ ἡ μὲν τοῦ στοιχειωτοῦ δεῖξις φανερὰν ἔχει τὴν ὁδόν· χρῆται γὰρ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι· δεῖ δὲ καθάπερ ἐν τῷ πρόσθεν εἰς τὴν γένεσιν ἀπιδόντα τῶν τριγώνων τὴν αἰτίαν εὑρεῖν [p. 311] τοῦ προκειμένου συμπτώματος. ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΒ πάλιν καὶ ΓΔ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς. εἰ οὖν μέλλοι τρίγωνον ἔσεσθαι, δεῖ συννεῦσαι[b] τὰς ΑΒ ΓΔ πρὸς ἀλλήλας. ἡ δὲ σύννευσις[c] αὐτῶν ἐλαττοῖ τὰς ἐντὸς γωνίας, ὥστε ἐλάττους γίνονται δυεῖν ὀρθῶν· εἰσὶ γὰρ ὀρθαὶ πρὸ τῆς συννεύσεως.[d] ὁμοίως δὲ κἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ <τὰς> Α<Γ Β>Δ[e] νοήσωμεν ἑστώσας ὀρθάς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται κατὰ τὴν σύννευσιν[f] τῶν εὐθειῶν καὶ ἔσονται αἱ πρὸς τῇ ΑΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· καὶ ἐπὶ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς ὡσαύτως.



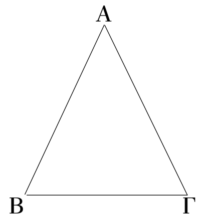
Τοῦτο οὖν τὸ αἴτιόν ἐστιν, ἀλλ' οὐχὶ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ἐκτὸς ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν. ἐκβεβλῆσθαι μὲν γὰρ τὴν πλευρὰν οὐκ ἀναγκαῖον, οὐδὲ ἔξω τινὰ συνεστάναι γωνίαν, τῶν δὲ ἐντὸς γωνιῶν β´ ὁποιασοῦν εἶναι <δυοῖν>[g] ὀρθῶν ἐλάττους ἀναγκαῖον. τὸ δὲ μὴ ἀναγκαῖον τοῦ ἀναγκαίου πῶς ἂν αἴτιον εἴη; ἀλλ' ὅπερ εἶπον, τὸ μὲν αἴτιόν ἐστι τὸ ῥηθέν, ἡ σύννευσις[h] τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τὴν βάσιν ἐλαττοῦσα τὰς ὀρθάς.

[p. 312] Τοῦ δὲ στοιχειωτοῦ διὰ τῆς ἐκτὸς γωνίας δείξαντος τὸ ζητούμενον φέρε καὶ μὴ προσεκβάλλοντές τινα τῶν πλευρῶν τὸ αὐτὸ κατασκευάσωμεν. ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΔ μία <πλευρὰ> προσεκβέβληται ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΑΒΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΔΓ, ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΑΔΒ μείζων τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΑΓΔ. ἀλλὰ μὴν αἱ περὶ τὴν ΑΔ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι διὰ τὸ τρισκαιδέκατον. αἱ ἄρα



ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους. ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΒΓΑ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖον λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ Β <εὐθεῖαν> ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον. καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ ΓΑΒ ΑΒΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους ἀποφανοῦμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ Γ εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦτο τὸ σημεῖον. δέδεικται ἄρα τὸ προκείμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος μὴ προσεκβληθείσης τινὸς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

[p. 313] Διὰ τούτου τοίνυν δυνατὸν κἀκεῖνο δεικνύναι, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν δύο κάθετοι οὐκ ἀχθήσονται. ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ δύο κάθετοι αἱ ΑΒ ΑΓ. ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαι. ἀλλ᾽ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΑΒΓ, δύο ὁποιαιοῦν γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσους εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσους εἰσίν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς διὰ τὰς καθέτους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀχθήσονται.



(a) πάντῃ scripsi : πάντη Friedlein || (b) συννεῦσαι scripsi : συνεῦσαι M Friedlein || (c) σύννευσις scripsi : σύνευσις M Friedlein || (d) συννεύσεως M : συνεύσεως Friedlein || (e) <τὰς> Α<Γ Β>Δ Luna : ΑΔ M ΑΓ ΒΔ Friedlein || (f) σύννευσιν M : σύνευσιν Friedlein || (g) δυοῖν suppleui (possis etiam δυεῖν uel δύο) : β suppl. Friedlein || (h) σύννευσις scripsi : σύνευσις M Friedlein.

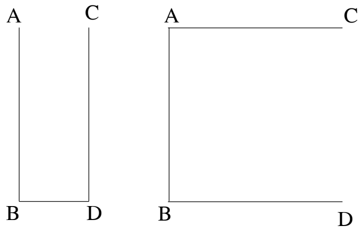
[Proposizione] XVII

La [*somma di*][106] *due angoli di ogni triangolo, comunque siano presi, è minore di due retti.*

Adesso si dimostra in modo indeterminato che la [somma di] due angoli qualunque di un triangolo è minore di due retti; nelle [proposizioni] seguenti sarà anche determinato di

[106] Per ragioni di chiarezza, è qui necessario integrare sistematicamente il termine "somma" nella traduzione. Innanzitutto, come si è detto (cf. *supra*, n. 5), benché Euclide non usi il termine "somma", intende parlare di angoli sommati l'uno all'altro, anche se in un senso puramente spaziale del termine, cioè traslandoli idealmente fino a farne coincidere il vertice e un lato per poi valutare l'ampiezza della porzione di spazio ottenuta. In secondo luogo, seguire la terminologia antica potrebbe condurre in questo caso ad espressioni ambigue. Si consideri un'espressione del tipo "in un triangolo acutangolo, i tre angoli sono minori di un retto". Quest'espressione è certamente vera; tuttavia, seguendo la terminologia greca, essa potrebbe essere interpretata anche nel senso che la somma dei tre angoli è minore di un retto, il che è invece falso. Riguardo alla mancata esplicitazione della necessità di sommare, il greco è agevolato dalla forte pregnanza dell'articolo determinativo, su cui cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 102, n. (a). Inoltre, anche se nella traduzione dell'enunciato della proposizione sarebbe effettivamente possibile sottintendere "somma" grazie alla presenza di πάντῃ μεταλαμβανόμεναι ("comunque presi assieme" equivale a "comunque sommati"), nel corso del commento non sarebbe possibile farlo senza ambiguità. Si prenda, ad esempio, la traduzione piuttosto letterale di p. 310.12-13 di Timpanaro Cardini: "Qui si dimostra in maniera indeterminata che due angoli qualunque di un triangolo sono minori di due angoli retti" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 252). È certo possibile comprendere che si sta parlando di una somma di angoli minore della somma di due retti; tuttavia, non credo che si possa escludere *a priori* un'interpretazione del tipo "presi due angoli qualunque di un triangolo, ognuno dei due è minore di un retto", come se si dicesse che ognuno dei due angoli è minore, rispettivamente, di ognuno dei due retti presi in considerazione. Anche se quest'interpretazione verrebbe subito scartata in quanto falsa – esistono infatti, non solo i triangoli rettangoli, ma anche gli ottusangoli –, è proprio per evitare questi fraintendimenti e dare al testo la massima chiarezza possibile che mi sembra sia meglio esplicitare che si sta parlando di angoli "presi insieme" e pertanto "sommati". In questo senso va anche la traduzione di Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), pp. 102-4. Si noti, infine, che Heiberg stesso, nella sua traduzione latina degli *Elementi*, rende un'espressione come ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν (*Elem.* I, prop. 17, t. I, p. 26.12-13), qui tradotta con "ma la [somma degli angoli] ACD e ACB è uguale a due retti", con "uerum **ΑΓΔ+ΑΓΒ** duobus rectis aequales sunt" (Euclidis *Opera omnia*, ed. I.L. Heiberg et H. Menge, Teubner, Leipzig 1883, p. 45; grassetto mio) proprio per evitare questa ambiguità. In tutti gli altri casi, quando è possibile tradurre il testo greco in modo letterale senza generare ambiguità, il termine "somma" non viene integrato nella traduzione.

quanto è minore, ovvero dell'angolo restante del triangolo: la [somma dei] tre angoli [del triangolo], infatti, è uguale a due retti,[107] cosicché la [somma di] due [angoli] è minore di due retti [di tanto quanto è grande] l'angolo restante. La dimostrazione dell'autore degli *Elementi* segue una via chiara perché utilizza il teorema precedente a questo.[108] Ma, come nel [teorema] precedente,[109] bisogna cercare la causa [p. 311] di questa proprietà guardando alla generazione dei triangoli. Dunque, siano di nuovo AB e CD ad [angolo] retto rispetto a BD. Se deve formarsi un triangolo, AB e CD devono convergere l'uno verso l'altro. Ma il loro convergere diminuisce gli angoli interni, cosicché la [loro somma] diventa minore di due retti: infatti, prima della convergenza erano retti. Similmente, anche se immaginassimo A<C e B>D che formano [angoli] retti su AB, accadrà lo stesso in seguito alla convergenza delle rette e la [somma degli] angoli rispetto ad AB[110] sarà minore di due retti; allo stesso modo anche sul lato restante.[111]



È questa, dunque, la causa [*scil.* della proprietà in esame], e non il fatto che l'[angolo] esterno è maggiore di ciascuno dei due [angoli] interni e opposti: infatti, non è necessario che si prolunghi il lato né che sia costruito un angolo esterno, mentre è necessario che la [somma di] due qualsiasi degli angoli interni sia minore di <due> retti. In che modo ciò che non è necessario potrebbe essere causa di ciò che è necessario?[112] Ma, come ho detto, la causa è quella enunciata, cioè il convergere delle rette sulla base che diminuisce gli [angoli] retti.

[p. 312] Dal momento che, però, l'autore degli *Elementi* ha dimostrato l'oggetto della [presente] ricerca attraverso l'angolo esterno, suvvia, dimostriamo la stessa cosa pur senza

---

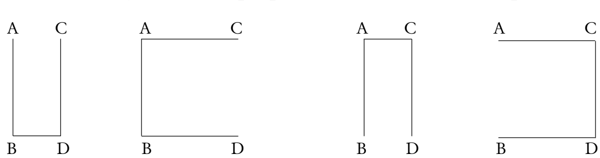
[107] Proclo anticipa la prop. 32 (cf. *Elem.* I, prop. 32, t. I, pp. 44.6-45.13); sui motivi per cui Euclide inserisce nel primo libro una proposizione fondamentalmente inclusa e superata da un'altra, cf. *supra*, pp. 39-40.

[108] Si tratta della prop. 16, detta anche "teorema dell'angolo esterno maggiore". Sul rapporto tra queste due proposizioni e la prop. 32, cf. *supra*, pp. 39-40; sul rapporto tra la prop. 16 e la prop. 17, cf. *infra*, pp. 45-7.

[109] Proclo fa riferimento alla dimostrazione di pp. 308.19-310.8 con cui si conclude il commento alla prop. 16. Anche in quella dimostrazione, come in quella che sta per cominciare, Proclo fa riferimento alla γένεσις τῶν τριγώνων, la "generazione dei triangoli", su cui cf. *infra*, p. 45.

[110] *Scil.* CAB e ABD.

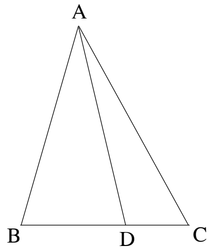
[111] A prima vista, in realtà, questa costruzione potrebbe essere ancora ripetuta non una volta soltanto, ma due: il segmento su cui si costruiscono gli altri due perpendicolarmente, infatti, potrebbe ancora essere AC oppure CD:



Proclo però, sta pensando alle figure disegnate non come quadrilateri "aperti", ma come triangoli "mancati", facendo in particolare riferimento al triangolo che si potrebbe costruire nella prima figura se A e C potessero convergere fino a coincidere in un unico vertice dell'ipotetico triangolo ABD/CBD senza alterare i due angoli retti alla base. Questo vuol dire che per Proclo le rette da esaminare come basi sono le tre che ha nominato all'inizio, cioè, nell'ordine, prima BD, poi AB, infine CD. Benché anche AC venga designata come retta nel momento in cui è necessario provare a costruire su AB come base (p. 311.10), essa non fa parte delle tre rette iniziali e dunque non viene presa in considerazione. Delle quattro figure disegnate, dunque, Proclo fa riferimento solo alla prima, alla seconda e alla quarta.

[112] Su quest'approccio aristotelico alla teoria della dimostrazione, cf. *infra*, pp. 45-6.

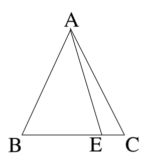
prolungare alcun lato.[113] Sia ABC un triangolo, sia preso a caso il punto D sul [lato] BC e si congiunga la [retta] AD. Dunque, poiché un <lato> del triangolo ABD, BD, è prolungato, l'angolo esterno ADC è maggiore dell'angolo interno ABD.[114] Di nuovo, poiché un lato del triangolo ADC, DC, è prolungato, l'angolo esterno ADB è maggiore dell'angolo interno ACD. Ora, gli angoli intorno alla [retta] AD[115] sono uguali a due retti a causa della [proposizione] tredicesima;[116] dunque, la [somma degli] angoli ABC e ACB è minore di due [angoli] retti.[117] Similmente, dimostreremo che anche la [somma degli] angoli BAC e BCA è minore di due [angoli] retti prendendo un punto sul [lato] AC e congiungendo una <retta> dal [vertice] B al punto preso. E di nuovo mostreremo che la [somma degli angoli] CAB e ABC è minore di due retti prendendo un punto sul [lato] AB e congiungendo una retta dal



[113] Inizia qui, con questa formula molto esplicita, la dimostrazione della prop. 17 fornita da Proclo. Anche se da un certo punto di vista il ragionamento di p. 311.1-14 potrebbe essere considerato una prima dimostrazione della prop. 17 (cf. *infra*, pp. 46-7), esso costituisce, per Proclo, solo la ricerca della causa. È dunque qui che inizia la vera e unica dimostrazione da lui data nel commento, emendata dall'errore di Euclide costituito dal non necessario prolungamento del lato.

[114] Per la prop. 16 o teorema dell'angolo esterno maggiore, cf. *supra*, pp. 39-40.

[115] Con l'espressione αἱ περὶ τὴν ΑΔ γωνίαι si intendono gli angoli che hanno AD in comune come lato, in questo caso ADB e ADC. L'espressione αἱ περὶ τοῦ *x* γωνίαι non si trova in altri testi matematici ed è usata da Proclo solo tre volte. Se *x* è un punto, l'espressione indica tutti gli angoli che hanno quel punto come vertice: cf. p. 303.3-4 in cui si afferma, dopo averlo dimostrato, che, se due rette si incontrano nel punto E, αἱ περὶ τὸ Ε σημεῖον γωνίαι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, "la [somma] dei quattro angoli intorno a E è equivalente a quattro retti". Se *x* è una retta, come accade negli altri due casi, l'espressione indica i due angoli interni a una figura chiusa che hanno in comune quella retta; oltre al passo in esame, cf. p. 324.10-11: αἱ ἄρα περὶ τὴν ΑΕ γωνίαι, "gli angoli intorno ad AE" con riferimento agli angoli AEB e AEC della figura seguente:

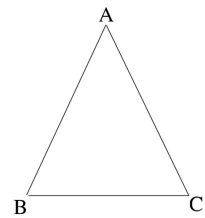


[116] Proclo si riferisce alla prop. 13 del primo libro (*Elem.* I, prop. 13, t. I, p. 21.1-2): Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει, "Quando una retta, innalzata su un'altra retta, forma degli angoli, formerà o due [angoli] retti o due [angoli la cui somma è] uguale a due retti". Proclo commenta questa proposizione a pp. 291.20-294.14 citando, tra l'altro, il lemma con la variante Ὡς ἂν *loco* Ἐὰν attestata anche, tra gli altri, in Simplicio, *In De caelo*, p. 651.11 Heiberg, e Filopono, *In Phys.*, p. 297.2 Vitelli (con altre piccole varianti). Anche Euclide, nella dimostrazione della prop. 17, fa uso della prop. 13. La prop. 13 sembra, di per sé, non necessaria: nella nostra terminologia un angolo piatto è per definizione equivalente a due retti e non c'è bisogno di dimostrarlo, cosa che invece Euclide fa. Per capirne la ragione, bisogna prendere in considerazione la definizione 8 che riguarda il concetto di "angolo piano", chiamato così per distinguerlo dall'angolo solido che entra in gioco nella geometria dello spazio. Cf. *Elem.* I, def. 8, t. I, p. 1.10-12: Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις, "È un angolo piano l'inclinazione di due linee su un piano che si toccano reciprocamente *e che non stanno l'una rispetto all'altra in linea retta*". Proclo commenta diffusamente questa definizione a pp. 121.8-128.22. La teoria euclidea, dunque, esclude esplicitamente l'angolo piatto dal novero degli angoli; per questo è necessario dimostrare che la somma di due angoli che danno luogo a quello che oggi chiameremmo angolo piatto è equivalente a due retti.

[117] Poiché ciascuno dei due è rispettivamente minore di uno di due angoli la cui somma è equivalente a due retti. Se ABD = ABC < ADC e ACD = ACB < ADB, ABC + ACB < ADC + ADB, e poiché ADC + ADB è uguale a due retti (per la prop. 13, cf. *supra*, n. 116), allora ABC + ACB è minore di due retti.

[vertice] C a questo punto. Dunque, la proposizione in oggetto è stata dimostrata attraverso lo stesso teorema[118] senza prolungare nessuno dei lati del triangolo.

[p. 313] Attraverso questo [teorema], peraltro, è possibile dimostrare anche quest'altro, cioè che non si condurranno dallo stesso punto due perpendicolari su una retta: siano, infatti, AB e AC perpendicolari a BC a partire dal punto A.[119] Dunque, gli angoli ABC e ACB sono retti. Ma poiché ABC è un triangolo, la [somma di] due angoli qualsiasi è minore di due retti. Dunque, la [somma degli] angoli ABC e ACB è minore di due retti, ma anche uguale a due retti a causa delle perpendicolari, il che è impossibile. Dunque, non si condurranno dallo stesso punto due perpendicolari sulla stessa retta.



Si noti, innanzitutto, che Proclo utilizza il concetto di γένεσις τῶν τριγώνων, "generazione dei triangoli", per spiegare la "vera causa" (τὸ αἴτιον) della proposizione. L'espressione, non attestata prima di Proclo e ricorrente più volte sia nell'*In Euclidem*[120] che negli scoli a Euclide,[121] fa riferimento alla concezione platonica e neoplatonica della geometria: non è il geometra che costruisce i triangoli (o le forme geometriche in generale), ma essi preesistono alle nostre operazioni mentali e sono oggetto della nostra conoscenza. È possibile "contemplare" la loro generazione rimanendo nell'ambito puramente eidetico. In questa prospettiva si può comprendere più precisamente ciò che Proclo intende dire a p. 310.5-8, concludendo la dimostrazione alla fine del commento della prop. 16: καὶ ἔχεις ἐκ τούτων συλλογίζεσθαι, πῶς αἱ γενέσεις τῶν πραγμάτων ὑπ' ὄψιν ἡμῖν τὰς ἀληθινὰς ἄγουσι τῶν ζητουμένων αἰτίας, "e da questo si può dedurre in che modo le generazioni delle cose ci mettono sotto gli occhi le vere cause di ciò che cerchiamo": la ὄψις a cui si fa riferimento è quella dell'intelletto che intuisce le idee per sé; osservare la γένεσις τῶν πραγμάτων, dunque, permette di comprendere davvero, in modo noetico, le cause di ciò che viene detto riguardo agli enti geometrici; solo successivamente interviene anche una dimostrazione discorsiva che formalizza l'intuizione e la inserisce in una struttura deduttiva di assiomi, postulati e teoremi. Il fatto che l'espressione sia da un lato non attestata prima di Proclo, dall'altro così frequente nel suo commento, dimostra l'importanza di questo approccio nell'ambito dell'esegesi procliana degli *Elementi.*

In questo caso, la ricerca dell'αἴτιον attraverso la γένεσις è fondamentale proprio perché si tratta di una proposizione così vicina al problema del quinto postulato. Come Proclo afferma chiaramente, ciò che si legge a p. 311.1-14 non è una dimostrazione della prop. 17, ma l'individuazione della "causa" della proposizione, cioè del termine medio che deve essere utilizzato per la sua dimostrazione. Questo spiega l'affermazione di p. 311.20-

[118] *Scil.* lo stesso teorema usato da Euclide nella sua dimostrazione della prop. 17, ovvero la prop. 16.

[119] Si tratta, com'è evidente, di una dimostrazione per assurdo. È impossibile, pertanto, darne una rappresentazione grafica: per seguire la dimostrazione, si immaginino paradossalmente gli angoli alla base del triangolo ABC entrambi retti.

[120] Cf., e.g., p. 82.21: εὑρήσομεν οὖν καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τετραγώνου γένεσιν; p. 83.8: τὸ μὲν πρῶτον τῶν τριγώνων τὰς γενέσεις; p. 208.3-4: ἐπιτάττει γὰρ ἡμῖν τριγώνου μηχανήσασθαι γένεσιν ἰσοπλεύρου ; p. 233.13-14: τὸ μὲν πρῶτον περὶ τὴν τῶν τριγώνων γένεσιν πραγματευόμενον.

[121] Si tratta di scoli che derivano dal commento di Proclo. Per esempio, lo scolio relativo alla prop. 17 del lib. I è tratto dal passo di Proclo qui in esame, cf. *In lib. I*, *scholion* 70, t. V 1, p. 104.22-24: σκοπήσωμεν δὲ καὶ ἡμεῖς τὴν τοῦ τριγώνου γένεσιν, καὶ τὴν αἰτίαν εὐχερῶς εὑρήσομεν τοῦ συμπτώματος, πῶς ἐλαττοῦνται δύο ὀρθῶν (cf. Proclo, *In Eucl.*, pp. 310.19-311.1).

21, “il non-necessario non può essere causa del necessario”: dal punto di vista aristotelico, poiché la dimostrazione è un ragionamento deduttivo, bisogna trovare un termine medio che sia necessario rispetto all’oggetto della dimostrazione stessa. La teoria aristotelica della dimostrazione a cui Proclo fa qui riferimento è quella secondo cui conclusioni necessarie possono derivare solo da premesse necessarie; cf., e.g., *Anal. Post.* I 4, 73a 21-24: Ἐπεὶ δ’ ἀδύνατον ἄλλως ἔχειν οὗ ἔστιν ἐπιστήμη ἁπλῶς, ἀναγκαῖον ἂν εἴη τὸ ἐπιστητὸν τὸ κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην· ἀποδεικτικὴ δ’ ἐστὶν ἣν ἔχομεν τῷ ἔχειν ἀπόδειξιν. ἐξ ἀναγκαίων ἄρα συλλογισμός ἐστιν ἡ ἀπόδειξις, “Dal momento che è impossibile che sia diversamente ciò di cui c’è scienza in senso assoluto, sarà necessario ciò che è conosciuto secondo la scienza dimostrativa. È dimostrativa [la scienza] che possediamo per il fatto di avere una dimostrazione. Dunque, la dimostrazione è un sillogismo [che procede] da [premesse] necessarie”.

La prop. 16 riguarda un angolo esterno e dunque in essa è necessario che il lato si prolunghi (difatti nel commento alla prop. 16 Proclo non solleva il problema del prolungamento del lato, cf. pp. 305.17-310.8), altrimenti l’angolo esterno non potrebbe esistere. Nel caso della prop. 17, invece, il prolungamento del lato non è necessario e dunque, per Proclo, esso non può essere usato ai fini della dimostrazione. L’inizio della dimostrazione della prop. 17 fornita da Proclo, a sua volta, è segnalato chiaramente dalla formula introduttiva di p. 312.1-3. Proclo dice esplicitamente che la sua dimostrazione si serve dello stesso teorema, cioè della prop. 16, ma senza fare uso del prolungamento del lato (p. 312.1-3, 20-22), e questo perché il prolungamento del lato non è una proprietà essenziale del triangolo. Lo scopo di Proclo è di rendere la dimostrazione di Euclide più cogente: eliminando un dato accidentale rispetto all’oggetto della dimostrazione (il prolungamento del lato), Proclo parte da una visione “essenzialistica” della figura geometrica cui si connette la ricerca del termine medio adeguato. Avere un vertice e un lato fa parte della definizione e quindi dell’essenza del triangolo, perciò è necessario; dunque, la dimostrazione che si serve di una retta che congiunge un vertice a un lato (come quella fornita da Proclo a p. 312.1-22) utilizza una proprietà essenziale del triangolo. La dimostrazione che si serve del prolungamento di un lato (ovvero la dimostrazione fornita da Euclide), invece, non utilizza una proprietà essenziale del triangolo perché il triangolo è triangolo indipendentemente dalla possibilità di prolungare uno dei suoi lati. Il prolungamento del lato nella dimostrazione data da Euclide è probabilmente dovuto al legame strutturale con la proposizione precedente, la prop. 16, ma per Proclo questo legame fra le due proposizioni non implica affatto che, nella dimostrazione della prop. 17, il prolungamento del lato sia ammissibile: nella prop. 16, il prolungamento è necessario perché l’oggetto della prop. 16 è l’angolo esterno, il quale non può esistere senza prolungamento del lato; dunque, il prolungamento del lato è imprescindibile nella dimostrazione della prop. 16. Nella prop. 17, invece, si parla solo degli angoli interni, per i quali il prolungamento del lato non è un dato essenziale. Da una parte, dunque, la dimostrazione euclidea resta corretta dal punto di vista geometrico e deduttivo, dall’altra è necessario rendersi conto dell’impostazione dell’esegesi procliana, basata platonicamente sull’idea della figura geometrica come *anteriore* alla costruzione del geometra e aristotelicamente sul concetto di necessità logica e di ricerca del “termine medio” corretto che funge da “causa”.

Compreso l’intento di Proclo, è possibile comunque dare una spiegazione strettamente geometrica del ragionamento di p. 311.1-14 facendo riferimento alla coppia di prop. 27 e 28. Esse saranno trattate diffusamente più avanti; per il momento, basti notare l’affinità tra la figura proposta da Proclo e la seconda parte della prop. 28, cioè: Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα […] ποιῇ […] τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι (t. I, p. 40.1-5), "Quando una retta, cadendo su due rette, [...] forma [...] gli [angoli] interni e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele fra loro". In termini moderni, se due rette tagliate da una trasversale formano gli angoli coniugati interni supplementari, sono parallele. La figura presa in esame da Proclo non è altro che un caso particolare della prop. 28: la somma dei due angoli coniugati interni è equivalente a due retti perché i due angoli stessi sono due retti. Secondo la prop. 28, segue pertanto che le due rette sono parallele e che – come dice Proclo – non si incontreranno mai a formare un triangolo. Ci si può chiedere se sia legittimo utilizzare la prop. 28 per dimostrare la prop. 17. È possibile farlo: la dimostrazione della prop. 28, infatti, si serve di quella immediatamente precedente, la prop. 27, la quale a sua volta si dimostra per assurdo utilizzando la prop. 16 o teorema dell'angolo esterno maggiore, di cui tra l'altro costituisce la contronominale.[122] Nel sistema del primo libro degli *Elementi*, nessuna delle proposizioni tra la prop. 17 e la prop. 26 viene utilizzata per dimostrare la prop. 27, per cui sarebbe del tutto legittimo *spostare* la prop. 17 dopo la prop. 28 e utilizzare quest'ultima nella dimostrazione della prop. 17.

Dunque, benché, come si è visto, Proclo non intenda p. 311.1-14 come una dimostrazione, questo passo sarebbe logicamente accettabile come dimostrazione. Non è inconsueta, in geometria, la possibilità di dare più dimostrazioni dello stesso teorema. All'interno del sistema del primo libro degli *Elementi* appare, certo, preferibile la soluzione adottata da Euclide. Infatti, si ricorderà che le prop. 27 e 28 fanno ancora parte di quel blocco iniziale di proposizioni che non utilizza il quinto postulato e rientra dunque nel sistema assiomatico della geometria assoluta.[123] Le prop. 27 e 28, però, sono le ultime due: a partire dalla prop. 29, infatti, Euclide si vedrà costretto a utilizzare il postulato delle parallele con tutte le difficoltà che questo comporta. Le prop. 27 e 28, tra l'altro, non sono vicine alla prop. 29 solo in termini di posizione, ma anche e soprattutto di concatenazione logica: infatti, preso il quinto postulato come diretta, esse ne costituiscono la contraria[124] e rientrano, quindi, nel quadrato di proposizioni di cui fa parte anche la prop. 29. Considerando il motivo per cui Euclide inserisce la prop. 17,[125] non è difficile immaginare perché egli abbia preferito utilizzare in questa dimostrazione il prolungamento del lato, giustificato anche dalla vicinanza con la prop. 16, piuttosto che proposizioni molto vicine a quel quinto postulato che egli cerca inizialmente di evitare.

7. La contraria: le proposizioni 27-28

Come si è detto, le prop. 27 e 28 insieme costituiscono la contraria del quinto postulato. In questo caso, data la **diretta** (= quinto postulato) "Se due rette, tagliate da una trasversale, hanno la somma degli angoli da una parte minore di due retti [ipotesi], esse si incontrano da quella parte [tesi]", la **contraria** (= prop. 27 e 28) sarà "Se due rette, tagliate da una trasversale, *non* formano angoli minori di due retti da nessuna delle due parti [negazione dell'ipotesi del postulato], esse *non* si incontrano [negazione della tesi del postulato]". Questo equivale a dire che se due rette tagliate da una trasversale hanno gli angoli coniugati interni supplementari,

---

[122] Sulla struttura della proposizione contronominale e sul suo rapporto con la proposizione diretta, cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

[123] Cf. *supra*, pp. 40-1.

[124] Sulla struttura della proposizione contraria e sul suo rapporto con la proposizione diretta, cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

[125] Cf. *supra*, p. 40, e *infra*, Appendice B, pp. 81-2.

sono parallele. La contraria *non è* logicamente implicata dalla diretta,[126] dunque le prop. 27 e 28 sono logicamente *svincolate* dal quinto postulato e possono, soprattutto, essere dimostrate indipendentemente da esso. Si ricorderà, infatti, che queste sono le ultime due proposizioni che, proprio perché dimostrate senza uso del quinto postulato, costituiscono il nucleo fondante della geometria assoluta.

Tuttavia, le prop. 27 e 28 non presentano una sola condizione (gli angoli coniugati interni supplementari), ma tre, ciascuna da sola sufficiente per dimostrare che due rette tagliate da una trasversale sono parallele: oltre al caso già considerato (enunciato da Euclide nella prop. 28), è possibile fare la stessa dimostrazione con gli angoli alterni interni congruenti (prop. 27) e con gli angoli corrispondenti congruenti (prop. 28). Lo stesso Proclo, però, afferma che i tre casi sono logicamente interscambiabili (pp. 355.21-356.5):

> τρία δὲ ἔστιν[(a)] ἀναλαμβάνειν ταῖς παραλλήλοις ὑπάρχοντα καθ᾽ αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτὸ χαρακτηριστικά τε αὐτῶν καὶ ἀντιστρέφοντα πρὸς αὐτάς, οὐ μόνον τὰ τρία ἅμα, ἀλλὰ καὶ ἕκαστον ἀποδιαληφθὲν τῶν λοιπῶν· ὧν τὸ μέν ἐστιν εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους [p. 356] ἴσας εἶναι τὰς ἐναλλάξ, τὸ δὲ εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσας εἶναι τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς, τὸ δὲ λοιπὸν εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσην εἶναι τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἕκαστον γὰρ τῶν συμπτωμάτων τούτων ἱκανὸν ἀποδειχθὲν παραλλήλους ἀποφῆναι τὰς εὐθείας.
>
> (a) δὲ ἔστιν Luna : δέ ἐστιν M Friedlein.

> Si possono assumere tre [proprietà] che appartengono alle parallele per sé e in quanto tali[127] e che le caratterizzano e si convertono con esse, non solo tutte e tre insieme, ma anche ciascuna presa separatamente dalle altre [due].[128] Di esse, una è che quando una retta taglia

[126] Cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

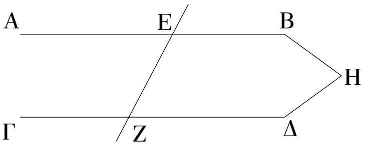
[127] In *An. Post.* I 4, 73 a 34-b 24, Aristotele stabilisce le due condizioni della predicazione καθόλου: il predicato deve appartenere ad ogni individuo della specie (κατὰ παντός) e deve appartenere al soggetto in virtù della natura stessa del soggetto (καθ᾽ αὑτό). Subito dopo (73 b 25-28), Aristotele aggiunge una terza condizione: il predicato deve appartenere al soggetto in quanto il soggetto è quello che è (ᾗ αὐτό). L'affermazione che segue immediatamente (73 b 28-29), cioè che καθ᾽ αὑτό e ᾗ αὐτό sono la stessa cosa, è a prima vista sorprendente. Il problema è discusso da Ross nel suo commento *ad loc.* (*Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, A Revised Text with Introduction and Commentary by W.D. Ross, Clarendon Press, Oxford 19572, pp. 522-3). Proclo distingue καθ᾽ αὑτό e ᾗ αὐτό in *In Alc.* 338.2-6 Segonds (cf. nota *ad loc.* di A.-Ph. Segonds, p. 368, n. 1 [pp. 456-7]). È dunque evidente che a p. 355.22-23 καθ᾽ αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτὸ si riferisce a ὑπάρχοντα e fa chiaramente riferimento a questo passo degli *An. Post.* Dunque, Proclo dice che è possibile assumere tre proprietà che appartengono alle parallele καθ᾽ αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτὸ (p. 355.21-23) e poi che queste proprietà sono caratteristiche delle parallele e si convertono con le parallele (p. 355.23-24). Sul modo in cui deve essere intesa questa conversione, cf. *infra*, n. 128.

[128] Mi allontano dalla traduzione di Morrow: "properties which are characteristic of them as such and convertible with them. We must examine them, not only all three together, but each of them separately from the others" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 277) e da quella di Timpanaro Cardini: "tre sono le proprietà delle parallele da prendere in considerazione, in se stesse e in quanto loro caratteristiche, e fra loro convertibili; e da considerare non solo tutte e tre insieme, ma anche ciascuna separatamente dalle altre" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 284). L'espressione οὐ μόνον τὰ τρία ἅμα, ἀλλὰ καὶ ἕκαστον ἀποδιαληφθὲν τῶν λοιπῶν non serve a specificare in che modo devono essere esaminate le proprietà, ma in che senso esse sono ἀντιστρέφοντα: non si capisce, infatti, che cosa significhi esaminare le tre proprietà *non solo* tutte insieme *ma anche* separatamente, come se Proclo facesse due trattazioni, una complessiva e una condotta singolarmente. Anche solo seguendo la sintassi e lo sviluppo della frase, mi sembra più chiaro interpretarla nel modo seguente: dato un ente geometrico, alcune sue proprietà potrebbero essere convertite con quell'ente, cioè potrebbero essere *necessarie e sufficienti* per identificare quell'ente. Avere i lati e gli angoli uguali, per esempio, è *necessario e sufficiente* perché un quadrilatero sia un quadra-

le parallele, gli angoli alterni sono uguali, l'altra che quando una retta taglia le parallele, [p. 356] gli angoli interni sono uguali a due retti, la terza che quando una retta taglia le parallele, l'angolo esterno è uguale a quello interno e opposto; infatti, ciascuna di queste proprietà è sufficiente, una volta dimostrata, a mostrare che le rette sono parallele.

Poiché, dunque, il caso degli angoli coniugati interni presentato nella prop. 28 è logicamente interscambiabile con gli altri due, la coppia di proposizioni 27-28 costituisce la contraria del quinto postulato. Il fatto che Euclide predilige evidentemente il caso degli angoli alterni congruenti (che propone per primo, isolandolo nella prop. 27, e al quale nella prop. 28 riconduce gli altri due) non inficia la struttura "a quadrato" delle proposizioni[129] e potrebbe anzi essere ben motivato.[130]

La prop. 27 asserisce che se due rette tagliate da una trasversale formano gli angoli alterni interni congruenti, le due rette sono parallele. Come già osservato precedentemente,[131] la prop. 27, come la prop. 28, è svincolata dalla prop. 17, cioè nella sua dimostrazione non è utilizzata né la prop. 17 né una proposizione che la utilizza. Dunque, la prop. 17 potrebbe essere inserita anche *dopo* la coppia di prop. 27 e 28, con tutte le conseguenze che questo comporterebbe. Inoltre, come la prop. 17, anche la prop. 27 viene dimostrata da Euclide adoperando la prop. 16 (cf. *Elem.* I, prop. 27, t. I, p. 39.1-15):



Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Infatti, la retta EF, cadendo sulle due rette AB e CD, formi gli angoli alterni AEF e EFD uguali tra loro; dico che AB è parallela a CD. Infatti, se non lo fosse, AB e CD, prolungandosi, si intersecheranno o dalla parte di B e D, o da [quella di] A e C. Siano

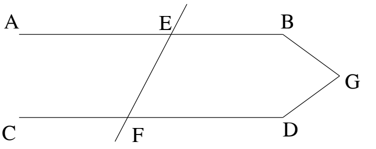
to. Ciascuna di queste due proprietà, però, non basta da sola: se il quadrilatero ha solo i lati uguali, infatti, sarà un rombo, se solo gli angoli uguali, un rettangolo. Avere i lati uguali e avere gli angoli uguali, dunque, sono proprietà caratteristiche del quadrato e sono interscambiabili con esso, ma solo ἅμα. Invece, nel nostro caso, anche una sola delle tre proprietà è *sufficiente* perché una coppia di rette sia una coppia di rette parallele. È importante, infine, notare che Proclo non dice che le tre proprietà sono convertibili "tra loro" (così in Timpanaro Cardini), sia perché il testo greco non permette di interpretare in questo modo, sia perché non è ciò che Proclo vuole sottolineare: si veda, infatti, come chiosa subito dopo, p. 356.3-5. Nell'analisi delle parallele (e dunque del quinto postulato) è di grande importanza il fatto che basta una sola di queste proprietà (gli angoli alterni interni congruenti, gli angoli coniugati interni supplementari, gli angoli corrispondenti congruenti) perché due rette siano parallele.

[129] Cf. *infra*, Appendice B, pp. 81-2.

[130] Cf. *infra*, pp. 58-9.

[131] Cf. *supra*, p. 40 e p. 47.

prolungate e si intersechino dalla parte di B e D in G. Allora, l'angolo esterno AEF del triangolo GEF è uguale all'angolo interno e opposto EFG, il che è impossibile.[132] Dunque, AB e CD, prolungandosi, non si intersecheranno dalla parte di B e D. Allo stesso modo si dimostrerà che non [si intersecheranno] nemmeno [dalla parte] di A e C; ma [rette] che non si intersecano da nessuna delle due parti sono parallele;[133] dunque, AB è parallela a CD. Dunque, se una retta cadendo su due rette forma gli angoli alterni uguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro: come si doveva dimostrare.



Si noti che la figura tenta di riprodurre un ragionamento per assurdo, per cui bisogna considerare (paradossalmente) i punti E, B, G e i punti F, D, G allineati e dunque EGF un triangolo con B e D punti appartenenti rispettivamente ai lati EG e FG. Il fatto che sia impossibile costruire un triangolo mantenendo l'ipotesi che AB e CD sono parallele tra loro dimostra anche "visivamente" la prop. 27 mediante l'assurdità della sua negazione.

Da un punto di vista strettamente logico, in realtà, potrebbe risultare improprio dire che la prop. 27 viene *dimostrata* utilizzando la prop. 16. Infatti, se si osserva la coppia di prop. 27-28 dal punto di vista degli angoli corrispondenti (considerati nella prop. 28), si nota che le due proposizioni sono contronominali.[134] Infatti, presa la prop. 16 come diretta, si ha che se due rette tagliate da una trasversale si incontrano (*scil.* se si forma un triangolo) [ipotesi], allora gli angoli corrispondenti *non* sono uguali (*scil.* l'angolo esterno, corrispondente di quello interno e opposto, è maggiore di esso) [tesi]; invece, nella prop. 28 si dice che se gli angoli corrispondenti sono uguali [negazione della tesi della prop. 16], allora le due rette tagliate dalla trasversale *non* si incontrano [negazione dell'ipotesi della prop. 16]. Poiché due proposizioni contronominali sono logicamente equivalenti,[135] la prop. 16 è logicamente equivalente alla prop. 28 e dunque anche alla prop. 27; più che di dimostrazione, dunque, si tratta di un'implicazione reciproca e di un'interscambiabilità come quelle che si hanno – come si vedrà meglio più avanti – tra il quinto postulato e la prop. 29.

Il commento di Proclo alla prop. 27 si apre con una considerazione generale che ricorda quella di pp. 120.13-121.7 esaminata precedentemente:[136] Euclide ha *scelto* di porre la sua geometria su un piano e dunque può darlo per scontato ogni volta che enuncia una proposizione (pp. 356.21-357.8). Seguono una discussione sul termine "alterno" (ἐναλλάξ) (p. 357.9-26) e l'elenco di tutti i possibili modi di prendere una coppia di angoli date due rette tagliate da una trasversale (pp. 357.27-359.6).[137] Infine, Proclo dimostra che sarebbe stato possibile ricavare gli stessi risultati di Euclide anche utilizzando le combinazioni da lui tralasciate e prova a spiegare perché Euclide ha scelto alcune combinazioni e non altre (pp. 359.7-361.4).

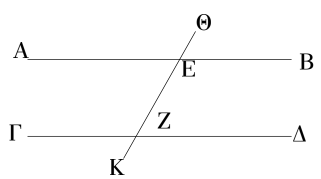
[132] Per la prop. 16 o "teorema dell'angolo esterno".
[133] Secondo la definizione di parallele.
[134] Cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 120, n. 23.
[135] Cf. *infra*, Appendice B, p. 81.
[136] Cf. *supra*, pp. 24-30.
[137] Non prendiamo in considerazione questa sezione del testo (pp. 357.9-359.6).

Proclo, *In Eucl.*, pp. 356.17-357.8, 359.7-361.4

XXVII *Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.*

Ἐπὶ τοῦ <προκειμένου ὡς>[a] ὁμολογούμενον[b] προείληπται τὸ εἶναι τὰς εὐθείας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, μᾶλλον δὲ ἐπὶ πάντων τῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ θεωρημάτων. τοῦτο δὲ προσέθεμεν διὰ[c] τὸ μὴ πάντως τῶν ἐναλλὰξ ἴσων οὐσῶν παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας, εἰ μὴ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ εἶεν [p. 357] ἐπιπέδῳ. κωλύει γὰρ οὐδὲν οἷον χιαστὶ τῶν εὐθειῶν κειμένων, τῆς μὲν ἐν ἄλλῳ, τῆς δὲ ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, ἐμπίπτουσαν εἰς αὐτὰς εὐθεῖαν ἴσας ποιεῖν τὰς ἐναλλάξ, ἀλλ' οὐ παράλληλοι αἱ οὕτως κείμεναι. προείληπται οὖν ὅτι πάντα, ὅσα καταγράφομεν ἐν τῇ ἐπιπέδῳ πραγματείᾳ, περὶ ἓν καὶ ταὐτὸν ἐπίπεδον φανταζόμεθα. διόπερ οὐκ ἐδεήθη καὶ ταύτης τῆς προσθήκης. [...]

Ἑξαχῶς οὖν λαμβανομένων τῶν γωνιῶν ὁ γεωμέτρης τρεῖς <λήψεις>[d] μόνας ἐπελέξατο[e] καὶ ταύταις[f] τὰ ἑπόμενα συμπτώματα τῶν παραλλήλων ἀπέφηνεν ὄντα χαρακτηριστικά. τούτων δὲ τῶν τριῶν μία μέν ἐστιν ἐκ τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐκ μὲν τῶν ἐντὸς ληφθεισῶν μόνον, ἃς καὶ ἐκάλεσεν ἐναλλάξ, ὡς παραλελεῖφθαι τὰς ἐκτὸς οὔσας ἀμφοτέρας καὶ τὴν μὲν ἐκτός, τὴν δὲ ἐντός· ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτά, τῶν δὲ ἐντὸς ἀμφοτέρων, ἃς δυσὶν ὀρθαῖς εἶναί φησιν ἴσας, καὶ ὧν ἡ μέν ἐστιν ἐντός, ἡ δὲ ἐκτός, ἃς εἶπεν ἴσας εἶναι, ὑπολειπομένης δὲ μιᾶς λήψεως τῆς ἐκτὸς ἀμφοτέρας ὑποτιθεμένης.



Ἡμεῖς οὖν φαμεν ὅτι καὶ ταῖς παραληφθείσαις τρισὶν ὑποθέσεσιν τὰ αὐτὰ ἕπεται. ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἄμφω ἐκτὸς αἱ ΘΕΒ ΔΖΚ. λέγω ὅτι αὗται δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ ἴση τῇ ὑπὸ ΘΕΒ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ τῇ ὑπὸ ΔΖΚ, εἰ δὲ αἱ ὑπὸ ΒΕΖ ΕΖΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΖΚ ΘΕΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὴ[g] ἐπὶ τὰ αὐτὰ [p. 360] μέρη αἱ γωνίαι, ὧν ἡ μὲν ἐντός, ἡ δὲ ἐκτός, αἱ ΑΕΘ καὶ ΕΖΔ. λέγω ὅτι καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΕΘ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΕΖ, αἱ δὲ ὑπὸ ΒΕΖ καὶ ΕΖΔ δύο ὀρθαί εἰσιν, καὶ αἱ ὑπὸ ΑΕΘ καὶ ΕΖΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέν, ἄμφω δὲ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν, ὡς αἱ ΑΕΘ ΔΖΚ. λέγω ὅτι αὗται ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ ΑΕΘ καὶ ΒΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΚ τῇ ὑπὸ ΒΕΖ, ἡ ὑπὸ ΑΕΘ ἄρα ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΚ γωνίᾳ. ἐὰν ἄρα ληφθῇ τὰ ἐπὶ τῶν τριῶν ὑποθέσεων ἃς ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν ἑπόμενα ὡς ἀληθῆ, πάντα τὰ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν, πλὴν ὅτι, ἐφ' ὧν μὲν ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν, κατὰ δύο μὲν λήψεις ὑπόκεινται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ γωνίαι, κατὰ μίαν δὲ δύο ὀρθαῖς αἱ γωνίαι, ἐπὶ δὲ τούτων ἀνάπαλιν κατὰ δύο μὲν δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ μίαν δὲ ἀλλήλαις. ἓξ γὰρ οὐσῶν πασῶν τῶν λήψεων ἐκ μὲν τῶν τριῶν συμβαίνει δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι τὰς γωνίας, ἐκ δὲ τῶν τριῶν ἴσας ἀλλήλαις, ὥστε εἰκότως αἱ παραλελειμμέναι ταῖς μνήμης ἠξιωμέναις λήψεσιν ἀνάπαλιν ἔχουσιν. ἔοικεν δὲ ὁ γεωμέτρης ταύτας ἐκλέξασθαι τῶν ὑποθέσεων, ὅσαι ἢ καταφατικὸν πλεονάζον ἔχουσιν, ἢ ἁπλούστεραί εἰσιν, καὶ διὰ τοῦτο λαβεῖν ἐκ μὲν τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μόνας τὰς ἐντός, ἃς δὴ κέκληκεν ἐναλλάξ, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ <τὰς ἐντὸς καὶ τὴν μὲν ἐντός, τὴν δὲ> [p. 361] ἐκτός, τὰς δὲ ἄλλας δι' ἀποφάσεως μᾶλλον δηλουμένας ἢ ὡς ποικιλωτέρας φυλάξασθαι. ἀλλ' οὖν εἴτε ταύτην, εἴτε ἄλλην αἰτίαν ῥητέον, δῆλον ἐκ τούτων πόσα ἐστὶ τὰ ἑπόμενα αὐτοῖς.

(a) προκειμένου ὡς add. Morrow || (b) ὁμολογούμενον Morrow : ὁμολογουμένου M Friedlein || (c) διὰ M : διὸ Friedlein || (d) λήψεις add. Luna || (e) ἐπελέξατο Luna (possis etiam ἐξελέξατο, cf. infra, p. 360.21) : ἐπλέξατο M[ac] ἐλέξατο M[pc] ἐκλέξατο (sic) Friedlein || (f) ταύταις Morrow : ταῦτα εἰς M Friedlein || (g) μὴ M (ut uid.) et coni. Morrow : μὲν M[mg. al. m.] Friedlein.

[Proposizione] XXVII

Se una retta cadendo su due rette forma gli angoli alterni uguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.

Il fatto che le rette sono su un unico piano è stato assunto preliminarmente <come> comunemente ammesso nel <presente> [teorema], anzi in tutti i teoremi nel piano.[138] E abbiamo premesso questo a causa del fatto che quando gli angoli alterni sono uguali, le rette non sono necessariamente parallele, a meno che non siano anche sullo stesso [p. 357] piano; nulla impedisce, infatti, che se le rette giacciono, per esempio, a croce, una su un piano, l'altra su un altro, una retta cadendo su di esse formi gli angoli alterni uguali, [e] tuttavia le [rette] che giacciono in questo modo non sono parallele. Si è dunque assunto preliminarmente che tutto ciò che descriviamo all'interno della trattazione della [geometria] piana,[139] [lo] immaginiamo riguardo ad un unico e medesimo piano. Per questo non c'è stato bisogno anche di questa aggiunta. [...]

Dunque, benché gli angoli si prendano in sei modi, il Geometra ha scelto solo tre <modi> e ha mostrato che le proprietà che conseguono ad essi sono [proprietà] caratteristiche delle parallele. Uno di questi tre [modi] è [costituito da angoli] che non sono dalla stessa parte, fra quelli che sono presi solo all'interno, che ha chiamato appunto "alterni", cosicché sono stati tralasciati quelli che sono entrambi esterni e uno esterno e uno interno; di quelli dalla stessa parte, [un modo è costituito da] quelli entrambi interni, che dice essere uguali a due retti, [uno da] quelli di cui uno è interno e uno esterno, che ha detto essere uguali, tralasciando un unico modo, cioè quello che suppone entrambi [gli angoli] esterni.[140]

Noi diciamo, allora, che le stesse cose seguono anche dalle tre ipotesi tralasciate: infatti, siano HEB e DFK [angoli] dalla stessa parte entrambi esterni. Dico che sono uguali a due retti: infatti, se DFE è uguale a HEB e BEF a DFK, e se BEF e EFD sono uguali a due retti, anche DFK e HEB sono uguali a due retti.[141] Di nuovo, siano due angoli non[142]

---

[138] Si accoglie la congettura di Morrow ʼEπὶ τοῦ <προκειμένου ὡς> ὁμολογούμενον (cf. Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 277, n. 3). Infatti, il testo tràdito ʼEπὶ τοῦ ὁμολογουμένου non dà un senso accettabile: nell'espressione ἐπὶ τοῦ ὁμολογουμένου, la preposizione ἐπὶ deve avere lo stesso senso che in ἐπὶ πάντων τῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ θεωρημάτων. La correlazione ἐπὶ τοῦ *x*... μᾶλλον δὲ ἐπὶ πάντων τῶν *y* implica che *x* deve appartenere alla classe degli *y*; quindi qui, poiché si dice che ciò che vale ἐπὶ τοῦ *x*... μᾶλλον δὲ ἐπὶ πάντων τῶν [...] θεωρημάτων, *x* deve appartenere alla classe dei θεωρήματα: quello che προείληπται a proposito di *x*, in realtà προείληπται a proposito non solo di *x*, ma di tutti i teoremi. Dunque *x* è un teorema. L'espressione ricostruita da Morrow, cioè ὡς ὁμολογούμενον (προ)λαμβάνειν, è frequentissima nei commentatori (fra i tanti esempi, cf. in particolare Simplicio, *In Phys.*, p. 375.12 Diels: εἰ προείληπται ὡς ὁμολογούμενον). Proclo la usa in *In Eucl.*, p. 239.2: τοῦτο γὰρ ὡς ὁμολογούμενον ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν; *In Remp.* I, p. 266.7 Kroll: τοῦτο μὲν ὡς ὁμολογούμενον προείληφεν; *In Tim.* I, p. 266.22 Diehl: ἔλαβεν ὡς ὁμολογούμενον. Per ἐπὶ τοῦ προκειμένου, cf. *In Tim.* I, p. 259.16-17 Diehl.

[139] Cf. *supra*, n. 41.

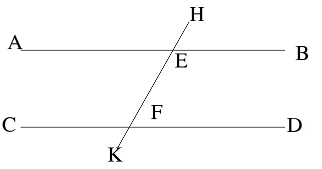
[140] Letteralmente, "essendo tralasciata solo la presa che [li] suppone entrambi all'esterno".

[141] La dimostrazione può essere formalizzata nel modo seguente:

1. DFE = HEB perché angoli corrispondenti (prop. 28);
2. BEF = DFK perché angoli corrispondenti (prop. 28);
3. DFE e BEF sono supplementari perché angoli coniugati interni (prop. 28).

Sostituendo in 3. angoli uguali ad angoli uguali (secondo 1. e 2.), segue che anche HEB e DFK sono supplementari.

[142] È necessario correggere *μὲν* in *μή* a p. 359.27 come proposto da Morrow (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 280, n. 8). La congettura di Morrow è confermata da un esame del ms. M (f. 196r 1), il cui testo è di difficile decifrazione per un guasto materiale: la lezione originaria, quasi illeggibile, era certamente *μή*, ma una mano posteriore ha ricostruito μὲν (testo dell'ed. Friedlein) nel margine superiore.



dalla stessa [p. 360] parte, di cui uno interno e uno esterno, AEH e EFD. Dico che anche essi sono uguali a due retti: infatti, se AEH è uguale a BEF e BEF ed EFD sono [uguali a] due retti, anche AEH ed EFD sono uguali a due retti.[143] Di nuovo, siano [due angoli] non dalla stessa parte, entrambi all'esterno delle rette, come AEH e DFK. Dico che essi sono uguali tra loro: infatti, se AEH e BEF sono uguali tra loro e DFK [è uguale] a BEF, dunque AEH è uguale all'angolo DFK.[144] Dunque, qualora siano assunte come vere le conseguenze delle tre ipotesi che il Geometra ha preso in considerazione, tutte le stesse [conseguenze saranno vere] anche riguardo alle restanti tre, eccetto che, nel caso di quelle che il Geometra ha preso in considerazione, secondo due modi di prendere [gli angoli] essi sono supposti uguali tra loro, secondo uno gli angoli [sono supposti uguali a] due retti, nel caso di queste [altre ipotesi], *e converso*, secondo due [modi di prendere gli angoli, essi sono supposti] uguali a due retti, secondo uno [sono supposti uguali] tra loro; infatti, essendo in totale sei i modi di prendere [gli angoli], da tre risulta che gli angoli sono uguali a due retti, da tre che [gli angoli sono] uguali tra loro, cosicché a buon diritto i modi di prendere [gli angoli] che sono stati tralasciati sono inversi rispetto a quelli che sono stati considerati degni di menzione. Sembra che il Geometra abbia scelto tra le ipotesi quelle che o hanno carattere maggiormente affermativo o sono più semplici, e per questo abbia preso fra gli [angoli] che non sono dalla stessa [parte] solo quelli interni, che appunto ha chiamato "alterni", mentre fra quelli dalla stessa [parte] <quelli interni e [quelli] uno interno e uno> [p. 361] esterno, mentre abbia evitato le altre [tre ipotesi] perché sono mostrate maggiormente per negazione oppure in quanto più complicate. Ma che si debba accogliere l'una o l'altra causa, è chiaro da tutte queste considerazioni quante sono le loro conseguenze.

Proclo dice che le ipotesi evitate da Euclide sono quelle "mostrate maggiormente per negazione" o "più complicate". Queste espressioni non sono del tutto perspicue. Credo che il senso di questa distinzione sia il seguente: date due rette parallele tagliate da una trasversale, le possibili coppie di angoli sono:

1. Angoli dalla stessa parte entrambi all'interno (= coniugati interni).
2. Angoli dalla stessa parte entrambi all'esterno (= coniugati esterni).
3. Angoli dalla stessa parte uno all'interno e uno all'esterno (= corrispondenti).
4. Angoli **non** dalla stessa parte entrambi all'interno (= alterni interni).
5. Angoli **non** dalla stessa parte entrambi all'esterno (= alterni esterni).
6. Angoli **non** dalla stessa parte uno all'interno e uno all'esterno.

[143] La dimostrazione può essere formalizzata nel modo seguente:
1. AEH = BEF perché angoli opposti al vertice (prop. 15);
2. BEF e EFD sono supplementari perché angoli coniugati interni (prop. 28).

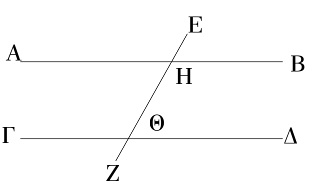
Sostituendo in 2. gli angoli uguali secondo 1., segue che anche AEH e EFD sono supplementari.

[144] La dimostrazione può essere formalizzata nel modo seguente:
1. AEH = BEF perché angoli opposti al vertice (prop. 15);
2. DFK = BEF perché angoli corrispondenti (prop. 28).

Sostituendo in 2. gli angoli uguali secondo 1., segue che anche AEH = DFK.

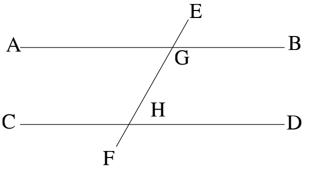
Per esprimere la totalità delle proprietà delle coppie di angoli originati da due rette parallele tagliate da una trasversale è sufficiente considerare tre coppie di "disposizioni". La terna deve contenere una coppia di angoli tra quelle qui numerate 1 e 2, una coppia tra quelle numerate 4 e 5 e una coppia tra quelle numerate 3 e 6, per un totale di otto possibili terne. Infatti, scrivendo le coppie mutuamente esclusive nella forma (A; B) e immaginando le possibili terne come (A; A; A), (A; A; B) etc., si ha un caso di disposizione con ripetizione; la disposizione con ripetizione di n elementi in k posti è n^k, dunque la disposizione con ripetizione di 2 elementi in 3 posti è $2^3 = 8$. La terna scelta da Euclide fra le 8 possibili è (1; 3; 4), mentre Proclo analizza la terna inversa (2; 5; 6) per dimostrare che è equivalente ad essa in termini di conseguenze e proprietà. Poi Proclo si chiede perché Euclide abbia scelto proprio la terna (1; 3; 4). La risposta è che, tra tutte le terne possibili, questa è quella che ha un maggior numero di affermative (e difatti l'unica in forma negativa è la 4; cf. p. 360.22: καταφατικὸν πλεονάζον ἔχουσιν, lett. "[quante] hanno un carattere affermativo eccedente", cioè, probabilmente, è una delle terne costituite più da affermative che da negative) e include il maggior numero di posizioni di angoli "più semplici". È probabile che con questa espressione Proclo intenda dire che, considerando in ordine di semplicità decrescente prima il caso con gli angoli entrambi all'interno, poi uno all'interno e uno all'esterno, infine entrambi all'esterno, questa terna ha due casi di angoli entrambi all'interno e uno solo di angoli uno all'interno e uno all'esterno. I casi scartati, invece, o sono in misura maggiore mostrati attraverso la negazione (δι' ἀποφάσεως μᾶλλον δηλουμένας, p. 361.1-2): infatti, nella terna (2; 5; 6) due casi su tre hanno forma negativa; o sono più complicati: infatti, in nessuno dei tre casi della terna (2; 5; 6) si prendono angoli entrambi all'interno e due su tre sono entrambi all'esterno.

Come si è detto, la prop. 28 estende il teorema precedente anche al caso in cui gli angoli coniugati interni sono corrispondenti e a quello in cui gli angoli corrispondenti sono congruenti. Per dimostrare questi due casi, Euclide si limita a ricondurre la coppia esaminata a quella degli angoli alterni interni della prop. 27 (cf. *Elem.* I, prop. 28, t. I, pp. 40.6-41.4):



Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Infatti, cadendo sulle due rette AB e CD, EF formi l'angolo esterno EGB uguale a quello interno e opposto GHD oppure gli angoli interni e dalla stessa parte BGH e GHD uguali a due retti; dico che AB è parallela a CD. Infatti, poiché EGB è uguale a GHD,



ma EGB è uguale ad AGH,[145] dunque anche AGH è uguale a GHD; ed [essi] sono [angoli] alterni; dunque AB è parallela a CD.[146] Di nuovo, poiché BGH e GHD sono uguali a due retti (per ipotesi), e anche AGH e BGH sono uguali a due retti,[147] dunque AGH e BGH sono uguali a BGH e GHD; sia tolto a entrambi l'[angolo] BGH; dunque, l'angolo rimanente AGH è uguale all'angolo rimanente GHD; ed [essi] sono [angoli] alterni; dunque AB è parallela a CD.[148] Dunque, se una retta, cadendo su due rette, forma l'angolo esterno uguale a quello interno, opposto e dalla stessa parte oppure gli angoli interni e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele: come si doveva dimostrare.

Come con la prop. 27, Proclo non commenta la dimostrazione che Euclide dà della prop. 28, ritenendola forse di per sé sufficientemente chiara. Innanzitutto, Proclo cerca di spiegare perché Euclide abbia diviso in questo modo i tre possibili casi da esaminare tra le due proposizioni (pp. 361.11-362.11). Subito dopo, afferma che Tolomeo aveva dimostrato diversamente da Euclide il caso degli angoli coniugati interni supplementari nella sua opera dedicata alla dimostrazione del quinto postulato (pp. 362.12-363.18).[149]

Proclo, *In Eucl.*, pp. 361.5-363.18

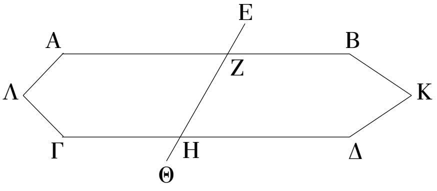
XXVIII *Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται εὐθεῖαι.*

Τὸ μὲν πρὸ τούτου θεώρημα τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας λαμβάνον, ἐντὸς δὲ τῶν εὐθειῶν κειμένας, ἴσας ἀλλήλαις ἐδείκνυ παραλλήλους οὔσας τὰς εὐθείας· τοῦτο δὲ τὰς λοιπὰς δύο ὑποθέσεις προστίθησιν, ὧν ἡ μὲν τὰς γωνίας μερίζει κατὰ τὸ ἐντὸς καὶ ἐκτός, ἡ δὲ ἀμφοτέρας ἐντὸς ὑποτίθεται, καὶ δείκνυσι τὸ αὐτὸ συμπέρασμα. δόξειεν δ' ἂν ἀτόπως ὁ στοιχειωτὴς τὰ θεωρήματα μερίσαι· δέον γὰρ ἦν ἢ τὰς τρεῖς ὑποθέσεις διαλαβεῖν καὶ ποιῆσαι τρία θεωρήματα, ἢ εἰς ἓν συνάγειν πάσας θεώρημα, ὥσπερ ἐποίησεν ὁ Ἱεραπολίτης Αἰγείας ὁ τὴν ἐπιτομὴν γράψας τῶν στοιχείων, ἢ διελεῖν εἰς δύο βουλόμενον εὔτακτον ποιήσασθαι τὴν διαίρεσιν καὶ χωρὶς μὲν λαβεῖν τὰς ὑποθέσεις ἐφ' ὧν ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι, χωρὶς δὲ ἐκείνην ἐφ' ἧς δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. νῦν [p. 362] δὲ ἐν ἑνὶ μὲν θεωρήματι τὰς ἐναλλὰξ ἴσας ὑπέθετο, ἐν ἑνὶ δὲ τὴν ἐκτὸς <ἴσην τῇ ἐντὸς> καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας. τί οὖν τὸ αἴτιον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως; εἰ οὖν <οὐ>[a] πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἀπέβλεψεν τὴν πρὸς ἀλλήλας ἢ τὴν πρὸς τὰς δύο ὀρθὰς οὐδὲ ταύτῃ διέστησε τὰ προκείμενα θεωρήματα ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνο τὸ τὰς γωνίας ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λαμβάνεσθαι ἢ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά. τὸ μὲν γὰρ πρὸ τούτου τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ παρελάμβανε – τοιαῦται γὰρ αἱ ἐναλλάξ – τοῦτο δὲ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτά, ὡς καὶ ἐκ τῆς προτάσεως δῆλον.

---

[145] Perché angoli opposti al vertice, per la prop. 15.
[146] Per la prop. 27.
[147] Perché angoli adiacenti, per la prop. 13.
[148] Per la prop. 27.
[149] La dimostrazione di Tolomeo è stata analizzata da Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), pp. 204-5, cui il presente commento deve molto. La stessa analisi si trova, sintetizzata, anche in Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), p. 296.

Ἀλλ’ ὅπως μὲν ὁ στοιχειωτὴς δείκνυσιν ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς αἱ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, φανερὸν ἐκ τῶν γεγραμμένων. Πτολεμαῖος δὲ ἐν οἷς ἀποδεῖξαι προέθετο τὰς ἀπ’ ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, τοῦτο πρὸ πάντων δεικνὺς τὸ θεώρημα, τὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ὑπαρχουσῶν τῶν ἐντὸς παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας οὕτω πως δείκνυσιν· ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΕΖΗΘ, ὥστε τὰς ὑπὸ ΒΖΗ καὶ ὑπὸ ΖΗΔ γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν. λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι, τουτέστιν ἀσύμπτωτοί εἰσιν. εἰ γὰρ [p. 363] δυνατόν, συμπιπτέτωσαν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΖ ΗΔ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΖ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν ΑΒ, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ ΑΖΗ ΒΖΗ γωνίας.



ὁμοίως δέ, ἐπεὶ ἡ ΗΖ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν ΓΔ, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ ΓΗΖ ΔΗΖ γωνίας. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΒΖΗ ΓΗΖ ΔΗΖ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ δύο αἱ ὑπὸ ΒΖΗ ΖΗΔ δύο ὀρθαῖς ὑπόκεινται ἴσαι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς ἴσαι. εἰ οὖν αἱ ΖΒ ΗΔ δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς ἐκβαλλόμεναι συνέπεσον κατὰ τὸ Κ, καὶ αἱ ΖΑ ΗΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται· δύο γὰρ ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ ἴσαι εἰσίν· ἢ γὰρ κατ’ ἀμφότερα συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ἢ κατ’ οὐδέτερα, εἴπερ καὶ αὗται κἀκεῖναι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. συμπιπτέτωσαν οὖν αἱ ΖΑ ΗΓ κατὰ τὸ Λ. αἱ ἄρα ΛΑΒΚ ΛΓΔΚ εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστιν δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς συμπίπτειν τὰς εὐθείας. παράλληλοι ἄρα εἰσίν.

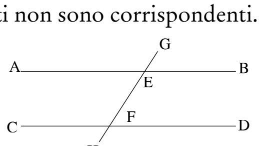
(a) οὐ add. Luna (iam add. Morrow in translatione).

[Proposizione] XXVIII

Se una retta, cadendo su due rette, forma l’angolo esterno uguale a quello interno, opposto e dalla stessa parte[150] *oppure gli angoli interni e dalla stessa parte uguali a due retti,* [*le*] *rette saranno parallele.*

Il teorema prima di questo, assumendo uguali tra loro gli angoli non dalla stessa parte e giacenti all’interno delle rette, dimostrava che le rette sono parallele [tra loro]; questo aggiunge le due ipotesi rimanenti, di cui una distribuisce gli angoli secondo l’interno e l’esterno, l’altra li suppone entrambi interni, e dimostra la stessa conclusione. Potrebbe sembrare che l’autore degli *Elementi* abbia distribuito i teoremi in modo strano: infatti, sarebbe stato necessario o considerare separatamente le tre ipotesi e fare tre teoremi, o ricondurle tutte ad un unico teorema, come ha fatto Egea di Ierapoli,[151] che ha scritto un’epitome degli *Elementi*, o, volendo dividerle in due [teoremi], fare una divisione ordinata e prendere separatamente da un lato le ipotesi in cui gli angoli sono uguali, e dall’altro

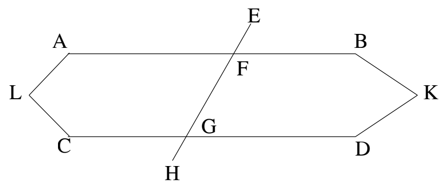
[150] Ognuna delle caratteristiche che Euclide specifica è necessaria per isolare esattamente la coppia di angoli corrispondenti: anche GEB e BEF, per esempio, sono uno all’esterno e uno all’interno e sono dalla stessa parte, ma non sono opposti (ἀπεναντίον) e infatti non sono corrispondenti.



[151] Personaggio altrimenti ignoto. Heath propone, benché *dubitanter*, di leggere Αἰνείας (Heath, *The thirteen books of Euclid’s Elements* [*supra*, n. 24], p. 311), anche se non cambierebbe il fatto che di Egea/Enea di Ierapoli non si hanno altre attestazioni oltre questo passo di Proclo.

quella in cui sono uguali a due retti. Ora, [p. 362] in un teorema ha preso come ipotesi gli [angoli] alterni uguali, nell'altro l'[angolo] esterno <uguale a quello interno>[152] e i due [angoli] interni e dalla stessa parte uguali a due retti. Qual è allora il motivo di una divisione di questo genere? Se dunque <non>[153] ha guardato all'uguaglianza degli angoli tra loro oppure con due retti e non ha distinto in questo modo l'uno dall'altro i presenti teoremi, [ha] però [guardato] a questo, cioè al fatto che gli angoli fossero presi o dalla stessa parte o non dalla stessa [parte]: infatti, il [teorema] prima di questo considerava gli angoli non dalla stessa parte – tali, infatti, sono gli [angoli] alterni –, mentre questo considera quelli dalla stessa [parte], com'è chiaro anche dall'enunciato.[154]

Ma in che modo l'autore degli *Elementi* mostra che, essendo gli angoli interni[155] uguali a due retti, le rette sono parallele, è chiaro da ciò che è stato scritto [da lui]. Tolomeo, invece, nel passo in cui si è proposto di dimostrare che le [rette] che si prolungano a partire da [angoli] minori di due retti si incontrano dalla parte in cui sono gli [angoli] minori di due retti,[156] dimostrando questo teorema prima di tutti gli altri, cioè che, essendo i due angoli interni[157] uguali a due retti, le rette sono parallele, lo dimostra in questo modo: siano AB e CD due rette e le tagli una retta EFGH in modo da formare gli angoli BFG e FGD uguali a due retti. Dico che le rette sono parallele, ovvero che sono asintotiche: infatti, se [p. 363] possibile, BF e GD[158] prolungandosi si intersechino in K. Allora, poiché la retta GF è innalzata su AB, forma



[152] Seguo l'integrazione di Friedlein che ristabilisce l'espressione abbreviata ἴσην τῇ ἐντὸς, frequente nel commento di Proclo (cf. p. 362.13: τῶν ἐντὸς = τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) e che sottintende che gli angoli siano anche opposti e dalla stessa parte. L'espressione risulta, dunque, imprecisa: infatti, non ogni coppia angolo esterno-angolo interno è costituita da angoli uguali. Non intervengo, però, sul testo allineando la citazione al lemma perché non sapendo quale testo di Euclide leggesse Proclo, bisogna mantenere inalterata la sua testimonianza che restituisce il testo degli *Elementi* letto ad Atene nel V secolo, dunque anteriore ai mss. bizantini.

[153] Appare necessaria l'integrazione di οὐ dopo οὖν proposta da C. Luna e già probabilmente considerata da Morrow, come si può dedurre dalla sua traduzione: "Clearly it was *not* the equality of the angles to each other etc." (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 282). In questo modo, οὐ è in correlazione con οὐδὲ e <οὐ> πρὸς è in correlazione con ἀλλὰ πρὸς. L'omissione è dovuta ad una quasi-aplografia. Proclo si chiede: qual è il criterio seguito da Euclide? E risponde: se non è l'uguaglianza e se non è in base all'uguaglianza che ha distinto le prop. 27 e 28, le ha piuttosto distinte in base al fatto di essere/non essere dalla stessa parte. Morrow ha ben compreso il senso della frase e ha inserito la negazione, ma non ha esplicitato la correzione. La traduzione di Timpanaro Cardini, invece, non fa senso: "Se egli avesse mirato all'eguaglianza dei triangoli, o fra loro o con due angoli retti, non per questo avrebbe separato l'uno dall'altro i teoremi in questione; ma l'ha fatto etc." (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 288). Lo stesso errore (omissione di οὐ dopo οὖν) si è prodotto anche nei passi seguenti: Plat., *Alc.* 148 C 7; Plutarco, *Quaestiones convivales*, 643 E 7; Sesto Empirico, *Adv. mathematicos*, X 247, p. 354.9 Mutschmann; Clemente di Alessandria, *Stromata*, II, xviii, 86, p. 159.4; IV, iv, 14, p. 254.19 Stählin; Alessandro di Afrodisia, *In Anal. Pr.*, p. 350.23 Wallies; Stobeo, *Anthologium*, IV, XXII, 20, p. 498.21 Hense. L'errore opposto (inserzione di οὐ dopo οὖν) si è prodotto in Arist., *Oec.*, II 2, 1352 b 8.

[154] Sull'uso di πρότασις nel senso di "proposizione" o "enunciato" in Proclo e negli *Elementi*, cf. *supra*, pp. 37-8.

[155] E naturalmente anche dalla stessa parte.

[156] Si tratta proprio del quinto postulato.

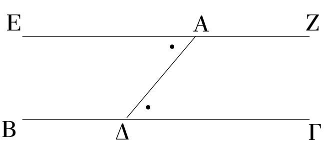
[157] E naturalmente anche dalla stessa parte.

[158] Nella matematica moderna sarebbe più naturale dire che a prolungarsi sono le rette intere (o, meglio, i segmenti) AB e CD; siccome, però, Tolomeo vuole dimostrare che le due rette non si incontreranno né da una parte né dall'altra, divide idealmente AB e CD in due metà, AF-FB e CG-GD, e le prolunga "separatamente".

gli angoli AFG e BFG uguali a due retti.[159] Similmente, poiché la [retta] GF è innalzata su CD, forma gli angoli CGF e DGF uguali a due retti. Dunque, i quattro angoli AFG, BFG, CGF e DGF sono uguali a quattro retti; di essi, due, BFG e FGD, sono uguali a due retti per ipotesi. Dunque, i restanti AFG e CGF sono anch'essi uguali a due retti. Allora, se FB e GD, essendo gli angoli interni uguali a due retti, prolungandosi si sono intersecate in K, anche FA e GC prolungandosi si intersecheranno: infatti, anche gli angoli AFG e CGF sono uguali a due retti; infatti, o le rette si incontreranno da entrambe le parti, o da nessuna, dal momento che sia questi sia quelli sono uguali a due retti. Si incontrino, allora, FA e GC in L. Dunque, le rette LABK e LCDK[160] racchiudono una superficie, il che è impossibile. Dunque, non è possibile che, essendo gli angoli interni uguali a due retti, le rette si incontrino; dunque sono parallele.

La spiegazione di Proclo sul motivo per cui Euclide abbia scelto di suddividere in questo modo i tre tipi di coppie di angoli sembra fermarsi alla constatazione che Euclide ha semplicemente preferito isolare la coppia di angoli non dalla stessa parte piuttosto che la coppia di angoli supplementari, nonostante il fatto che questo criterio sarebbe stato più naturale. Heath propone di leggere dietro la scelta di Euclide delle ragioni di "convenienza": "But may not the reason have been one of convenience […]?"[161] In effetti, il caso degli angoli alterni interni è l'unico in cui si può usare direttamente la prop. 16 (il "teorema dell'angolo esterno maggiore") per dimostrare per assurdo che le due rette non si possono incontrare, altrimenti si formerebbe un triangolo con l'angolo esterno uguale, non maggiore, a quello interno; per questo motivo, dimostrando poi la prop. 28 Euclide si limita a ricondurre le altre due ipotesi a quella della prop. 27. La prop. 27, inoltre, è usata nella prop. 31 per costruire una parallela a una retta dato un punto esterno (è un esempio di proposizione-problema), cf. *Elem.* I, prop. 31, t. I, pp. 43.11-44.5:

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ. Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

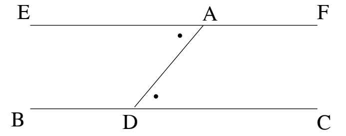
Per un punto dato condurre una linea retta parallela a una retta data.
Sia A il punto dato e BC la retta data; bisogna condurre per il punto A una linea retta parallela alla retta BC. Sia preso a caso su BC il punto D e sia congiunta AD; e sulla retta DA

[159] In quanto angoli adiacenti, per la prop. 13.

[160] È impossibile riprodurre in una figura un ragionamento per assurdo; si considerino, paradossalmente, i punti L, A, B e K allineati e così anche i punti L, C, D e K.

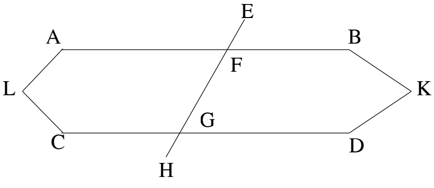
[161] Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), p. 311.

e con vertice sul punto A su di essa sia costruito l'angolo DAE uguale ad ADC;[162] e si prolunghi la retta AF allineata a EA (*scil.* si prolunghi EA fino al punto F). E dal momento che la retta AD cadendo su due rette, BC e EF, ha formato gli angoli alterni EAD e ADC uguali tra loro, dunque EAF è parallela a BC.[163] Dunque, per il punto dato A è stata condotta la linea retta EAF parallela alla retta data BC; come si doveva costruire.



Come si evince anche da quest'uso privilegiato della prop. 27 nella costruzione di una parallela a una retta data, è probabile che Heath abbia ragione e che Euclide abbia isolato proprio il caso degli angoli alterni interni perché più funzionale innanzitutto a dimostrare per assurdo il parallelismo delle rette che rispettano quel criterio, poi anche a disegnare le parallele stesse.

Per quanto riguarda la dimostrazione di Tolomeo, Heath nota che il passaggio più delicato è quello in cui Tolomeo dice che se FB e GD prolungandosi si sono incontrate in K, allora anche FA e GC prolungandosi si intersecheranno. Il ragionamento non è completamente sbagliato, tuttavia sarebbe stato notevolmente più chiaro se Tolomeo avesse dimostrato che non solo la somma degli angoli da una parte è uguale alla somma di quelli dall'altra – ed entrambe le somme sono uguali a due retti –, ma anche che ciascuno dei due angoli da una parte è uguale a uno dei due dall'altra rispettivamente.[164] Si può obiettare, però, che questo avrebbe voluto dire dimostrare la proprietà degli angoli coniugati interni supplementari mediante quella degli angoli alterni interni come fa Euclide nella sua dimostrazione della prop. 28. Fatte queste dimostrazioni aggiuntive, prosegue Heath, e dimostrato che BFG è uguale a FGC e DGF ad AFG, se FB e GD, prolungate, si incontrano in K, sarebbe possibile ruotare e traslare il triangolo FKG dall'altra parte (poiché, appunto, gli angoli alla base sarebbero uguali) e dimostrare che anche dall'altra parte le due rette dovrebbero formare un triangolo e dunque incontrarsi in L, il che, come spiega poi Tolomeo, è assurdo. In realtà, l'osservazione conclusiva riguardo al fatto che due rette non possono racchiudere una superficie, apparentemente ragionevole e incontrovertibile, non vale per tutti i tipi di geometrie: infatti, in alcune varietà di geometria ellittica, tra cui quella sferica, due rette si incontrano in due punti antipodali e dunque racchiudono una superficie.



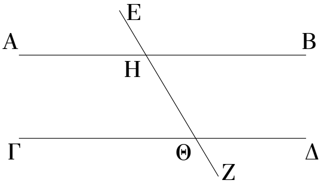
8. La contronominale: la proposizione 29

La prop. 29 è l'inversa delle prop. 27-28: ciò che lì era ipotesi, qui è tesi e viceversa.[165] Infatti, non si tratta più di dimostrare che se due rette tagliate da una trasversale hanno certe proprietà, *allora* sono parallele, ma che se due rette tagliate da una trasversale *sono parallele*, *allora* hanno certe proprietà (cioè gli angoli alterni interni e gli angoli corrispondenti sono

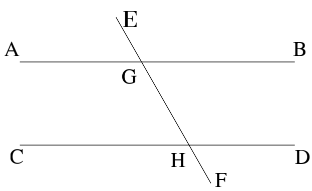
[162] Per la prop. 23.
[163] Per la prop. 27.
[164] Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), p. 204.
[165] Cf. *infra*, Appendice B, p. 81.

uguali, gli angoli coniugati interni sono supplementari). È questa la prima grande differenza tra la prop. 29 e tutte le precedenti: infatti, prima della prop. 29 sarebbe stato impossibile dare una coppia di parallele *per ipotesi*. Iniziare ad adoperare il quinto postulato, invece, permette a Euclide di dare *per ipotesi* una coppia di parallele, benché conoscere che due rette siano parallele senza dedurlo dalle loro proprietà (come invece Euclide fa con le prop. 27 e 28) e senza considerare il quinto postulato come un postulato implichi, in teoria, prolungarle all'infinito e osservare che non si incontrano.

Effettivamente la prop. 29 è la prima nella cui dimostrazione viene utilizzato il postulato delle rette parallele (cf. *Elem.* I, prop. 29, t. I, pp. 41.10-42.15):



Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Infatti, cada la retta EF sulle rette parallele AB e CD; dico che forma gli angoli alterni AGH e GHD uguali e l'angolo esterno EGB uguale all'[angolo] interno e opposto GHD e gli [angoli] interni e dalla stessa parte BGH e GHD uguali a due retti. Infatti, se l'[angolo] AGH è disuguale rispetto all'[angolo] GHD, uno di essi è più grande. Sia più grande l'[angolo] AGH; sia aggiunto a entrambi l'[angolo] BGH; dunque, AGH e BGH sono maggiori di BGH e GHD. Ma AGH e BGH sono uguali a due retti.[166] Dunque, BGH e GHD sono minori di due retti. **Ma le [rette] che si prolungano illimitatamente a partire da [angoli] minori di due retti si intersecano**;[167] dunque, AB e CD, prolungandosi illimitatamente, si intersecheranno; tuttavia, non si intersecano per il fatto che esse sono supposte parallele; dunque, l'[angolo] AGH non è disuguale rispetto all'[angolo] GHD; dunque, è uguale. Ma l'[angolo] AGH è uguale all'[angolo] EGB.[168] Dunque, anche l'[angolo] EGB è uguale all'[angolo] GHD. Sia

[166] Perché angoli adiacenti, per la prop. 13.
[167] Per il quinto postulato.
[168] Perché angoli opposti al vertice, per la prop. 15.

> aggiunto a entrambi l'[angolo] BGH; dunque, EGB e BGH sono uguali a BGH e GHD. Ma EGB e BGH sono uguali a due retti; dunque, anche BGH e GHD sono uguali a due retti. Dunque, una retta, cadendo su due rette parallele, forma sia gli [angoli] alterni uguali fra loro, sia l'angolo esterno uguale a quello interno e opposto, sia gli angoli interni e dalla stessa parte uguali a due retti; come si doveva dimostrare.

Tuttavia, se la prop. 29 è l'inversa delle prop. 27-28 e queste ultime costituiscono la contraria del quinto postulato, la prop. 29 è la contronominale del quinto postulato.[169] Dunque, come si è visto nel caso della prop. 27 rispetto alla prop. 16, è improprio parlare di dimostrazione quando due proposizioni sono contronominali, perché le contronominali si implicano a vicenda. Poiché il quinto postulato è, appunto, un postulato, tale è anche la prop. 29; sarebbe, anzi, possibile sostituire l'enunciato del quinto postulato con quello della prop. 29 e si otterrebbe comunque lo stesso sistema assiomatico, cioè quello della geometria euclidea. Non è un caso, dunque, che solo a partire dalla prop. 29 Euclide utilizza il quinto postulato: dunque, è a partire da qui che ha inizio la geometria euclidea vera e propria, cioè quella che si fonda sul quinto postulato ed è per ciò stesso distinta dalle altre geometrie.

Il commento di Proclo alla prop. 29 si apre con la spiegazione del rapporto tra questa proposizione e le due precedenti e dei motivi per cui, secondo Proclo, il quinto postulato, usato per la prima volta nella dimostrazione di questa proposizione, non è un postulato (pp. 364.6-365.4). Seguono, poi, il tentativo di dimostrazione di Tolomeo e la sua confutazione (pp. 365.7-368.26), un'opinione paradossale di alcuni matematici anonimi secondo cui il quinto postulato non solo *non è dimostrabile*, ma è addirittura *falso* (pp. 368.26-369.20) che Proclo confuta (pp. 369.21-371.10), infine il tentativo di dimostrazione del quinto postulato dello stesso Proclo (pp. 371.10-373.2). Sebbene, come si è detto, i tentativi di dimostrazione di Tolomeo e Proclo, unitamente all'opinione paradossale citata tra i due, siano stati commentati da Heath,[170] ne diamo tuttavia il testo greco e la traduzione, accompagnati da un commento (in gran parte dipendente da quello di Heath), affinché il lettore possa disporre dell'insieme dei passi del commento di Proclo relativi al quinto postulato.

Proclo, *In Eucl.*, pp. 364.1-373.2

XXIX *Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ ἴσας*[(a)] *ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς <καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς>*[(b)] *καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας.*

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἀμφοτέροις ἀντιστρέφει τοῖς προειρημένοις θεωρήμασι· τὸ γὰρ ἐν ἑκατέρῳ ζητούμενον ὑπόθεσιν ποιεῖται, τὰ ἐν ἐκείνοις δεδομένα δεικνύναι προτίθεται. καὶ δεῖ μεμνῆσθαι καὶ τῆς τοιαύτης τῶν ἀντιστροφῶν διαφορᾶς, ὅτι πᾶν τὸ ἀντιστρέφον ἢ ἓν ἑνὶ ἀντιστρέφει, ὡς τῷ πέμπτῳ τὸ ἕκτον, ἢ πλείοσιν ἕν, ὡς τὸ νυνὶ προκείμενον τοῖς πρὸ αὐτοῦ. ἐν δὲ τούτῳ τῷ θεωρήματι πρῶτον ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο τούτῳ τῶν αἰτημάτων τῷ *ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπίπτειν τὰς εὐθείας ἐκβαλλομένας, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες·* ὅπερ ἐξηγούμενοι

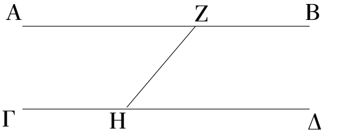
---

[169] Data una proposizione diretta, la contronominale è l'inversa della contraria e la contraria dell'inversa (cf. *infra*, Appendice B, p. 81).

[170] Cf. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), pp. 205-8. Il tentativo di Tolomeo è analizzato, anche se in modo più conciso, anche in Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (*supra*, n. 14), p. 296-7.

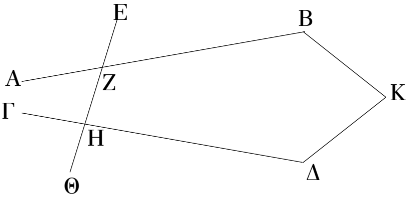
τὰ πρὸ τῶν θεωρημάτων ἐλέγομεν ὡς οὐ παρὰ πάντων τοῦτο συγκεχώρηται εἶναι ἀναποδείκτως ὁμολογούμενον. καὶ πῶς γὰρ ἂν εἴη τοιοῦτον οὗ τὸ ἀντίστροφον ὡς ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀναγέγραπται; τὸ γὰρ *παντὸς τριγώνου δύο τὰς ἐντὸς γωνίας ὁποιασοῦν ἐλάσσους εἶναι δύο ὀρθῶν* ἀντίστροφόν ἐστι τῷ αἰτήματι τούτῳ· ἐπεὶ καὶ συννεύειν[c] τὰς εὐθείας ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον [p. 365] ἐκβαλλομένας οὐκ ἔστι τεκμήριον τῆς συμπτώσεως διὰ τὸ καὶ ἄλλας εὑρῆσθαι γραμμὰς συννευούσας μὲν ἀεὶ πλέον καὶ πλέον, συμπιπτούσας δὲ οὐδέποτε, καθὰ καὶ εἴρηται πρότερον.

Ἤδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα προτάξαντες τοῦτο <ὡς>[d] αἴτημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφθὲν ἀποδείξεως ἠξίωσαν. δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος αὐτὸ δεικνύναι ἐν τῷ περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν, καὶ δείκνυσι πολλὰ προλαβὼν τῶν μέχρι τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων. καὶ ὑποκείσθω πάντα εἶναι ἀληθῆ, ἵνα μὴ καὶ ἡμεῖς ὄχλον ἐπεισάγωμεν ἄλλον, καὶ ὡς λῆμμά τι ὂν[e] τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων. ἓν δὲ καὶ τοῦτο τῶν προδεδειγμένων, τὸ τὰς ἀπὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλομένας μηδαμῶς συμπίπτειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀληθές, [καὶ][f] τὸ παραλλήλων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. ἀνάγκη γὰρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλήλους ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους ἢ μείζους. ἔστωσαν οὖν παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ ΗΖ· λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ δύο ὀρθῶν μείζους, [p. 366] αἱ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ΒΖΗ ΔΗΖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους· ἀλλὰ καὶ δύο ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί – οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ ΑΖ ΓΗ παράλληλοι ἢ αἱ ΖΒ ΗΔ, ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς ΑΖ ΓΗ δύο ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντός, καὶ ἡ εἰς τὰς ΖΒ ΗΔ ἐμπίπτουσα δύο ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντός –, ἀλλ' αἱ αὐταὶ καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους – αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ ΒΖΗ ΔΗΖ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι – ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι <ἡ>[g] εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. εἰ δὲ μήτε μείζους μήτε ἐλάσσους ποιεῖ τῶν δύο ὀρθῶν, λείπεται τὴν ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας.



Τούτου δὴ οὖν προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβητήτως ἀποδείκνυται. λέγω γὰρ ὅτι *ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*. μὴ γὰρ συμπιπτέτωσαν· ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἐφ' ἃ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα, ἐφ' ἃ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ' ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι. εἰ δὲ τοῦτο, παράλληλοί εἰσιν. ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. [p. 367] αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον.

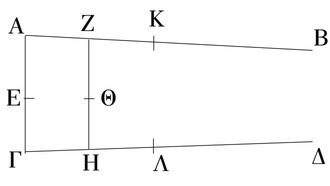
Ταῦτα προδεδειχὼς ὁ Πτολεμαῖος καὶ καταντήσας εἰς τὸ προκείμενον ἀκριβέστερόν τι προσθεῖναι βούλεται καὶ δεῖξαι ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθῶν ποιῇ ἐλάσσονας, οὐ μόνον οὐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, ὡς δέδεικται, ἀλλὰ καὶ ἡ σύμπτωσις αὐτῶν κατ' ἐκεῖνα γίνεται τὰ μέρη ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, οὐκ ἐφ' ἃ αἱ μείζονες. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ ΕΖΗΘ ποιείτω τὰς ὑπὸ ΑΖΗ καὶ ὑπὸ ΓΗΖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. αἱ λοιπαὶ ἄρα μείζους δύο ὀρθῶν. ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ



εὐθεῖαι δέδεικται. εἰ δὲ συμπίπτουσιν, ἢ ἐπὶ τὰ Α Γ συμπεσοῦνται ἢ ἐπὶ τὰ Β Δ. συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β Δ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ καὶ ΓΗΖ δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ ΑΖΗ ΒΖΗ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΑΖΗ, ἡ ὑπὸ ΓΗΖ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ ΒΖΗ. τριγώνου ἄρα τοῦ ΚΖΗ ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. ἀλλὰ μὴν συμπίπτουσι. κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, καθ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες.

[p. 368] Ταῦτα μὲν οὖν ὁ Πτολεμαῖος. ἐφιστάνειν δὲ ἄξιον μήποτε[h] παραλογισμός τίς ἐστιν ἐν ταῖς εἰλημμέναις ὑποθέσεσι, λέγω δὲ ἐν ἐκείναις ἐν αἷς ἔλεγεν ὅτι τῆς τεμνούσης εὐθείας τὰς ἀσυμπτώτους τέτταρας ἐντὸς γωνίας ποιούσης αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν ἢ δύο ὀρθῶν μείζους ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. οὐ γὰρ τελεία ἡ διαίρεσις· κωλύει γὰρ οὐδὲν τὸν ἀσυμπτώτους λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δυεῖν ὀρθῶν ἐκβαλλομένας τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, καὶ οὐχ ἕνα περὶ τούτων ἀποδέχεσθαι λόγον. ἀτελοῦς δὲ οὔσης τῆς διαιρέσεως οὐκ ἀποδέδεικται τὸ προκείμενον. ἔτι δὲ κἀκεῖνο πρὸς τὴν δεῖξιν ῥητέον, ὅτι οὐ καθ' αὑτὸ δείκνυσι τὸ ἀδύνατον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ παραλλήλους τέμνουσά τις εὐθεῖα μείζους ἐποίησεν τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα μέρη δύο ὀρθῶν ἢ ἐλάσσους, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ ἄτοπον ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, ἀλλ' ἐπειδὴ τέσσαρες τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἐντὸς τῶν τεμνομένων, διὰ τοῦτο ἀδύνατος ἑκατέρα τῶν ὑποθέσεων τούτων, ἐπεὶ κἂν μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας τὰ αὐτά, ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων.

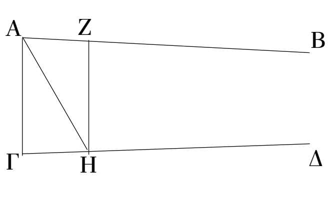
Πρὸς μὲν οὖν Πτολεμαῖον ταῦτα λέγοντες ἐπιστήσομεν· φανερὰ γὰρ ἡ τῆς δείξεως ἀσθένεια διὰ τῶν εἰρημένων. φέρε δὲ κἀκείνους ἐπισκεψώμεθα τοὺς λέγοντας ἀδύνατον εἶναι τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ [p. 369] δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. λαβόντες γὰρ εὐθείας δύο τὰς ΑΒ ΓΔ καὶ ἐμπίπτουσαν εἰς αὐτὰς τὴν ΑΓ καὶ ποιοῦσαν τὰς ἐντὸς δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας οἴονται[i] δεικνύναι μὴ συμπιπτούσας τὰς ΑΒ ΓΔ. διῃρήσθω γὰρ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ ἴση τῇ ΑΕ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ ἴση τῇ ΕΓ ἡ ΓΗ. δῆλον ἄρα ὅτι αἱ ΑΖ ΓΗ οὐ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ ΖΗ. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται, ἔσονται αἱ δύο τῇ ΑΓ ἴσαι ἐν τριγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον. πάλιν ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ καὶ ἴσαι ἀφῃρήσθωσαν.



οὐδὲ αὗται ἄρα συμπεσοῦνται διὰ τὰ αὐτά. καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον ποιοῦντες, ἐπιζευγνύντες τὰ ἀσύμπτωτα σημεῖα καὶ τὴν ἐπεζευγμένην διχοτομοῦντες καὶ ἴσας ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῖς ταύτης ἡμίσεσιν ἀφαιροῦντες, δεικνύναι φασὶν ὅτι οὐδαμοῦ συμπίπτουσιν αἱ ΑΒ ΓΔ εὐθεῖαι.

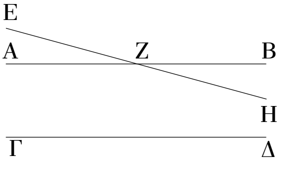
Τούτων δὴ τοιαῦτα λεγόντων ῥητέον ἡμῖν ὅτι λέγουσι μέντοι ἀληθές, οὐ μέντοι ὅσον γε οἴονται. ὅτι μὲν γὰρ ὁρίσαι τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως ἁπλῶς [p. 370] οὕτως οὐκ ἔστιν, ἀληθές· οὐ μέντοι τὸ μηδὲ τὸ παράπαν συμπίπτειν αὐτὰς ἀληθές. μὴ συμπιπτέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ καὶ ὑπὸ ΔΓΑ γωνίας ὡρισμένης κατὰ τὸ Ζ καὶ τὸ Η· ἀλλ' οὐδὲν κωλύονται κατὰ τὰ Κ Λ συμπεσεῖν, κἂν ἴσαι ὦσιν αἱ ΖΚ ΗΛ ταῖς ΖΘ ΘΗ. τῶν γὰρ ΑΚ ΓΛ συμπιπτουσῶν κατὰ τὰ Κ Λ οὐκέτι μένουσιν αἱ ὑπὸ ΚΖΘ ΛΗΘ γωνίαι αἱ αὐταί, καὶ γίνεταί τι τῆς ΖΗ ἐκτὸς τῶν ΑΚ ΓΛ εὐθειῶν, καὶ οὕτως αἱ δύο πάλιν αἱ ΖΚ ΗΛ μείζους τῆς βάσεως, ὅσην ἀπολαμβάνουσιν ἐντὸς τῆς ΖΗ εὐθείας.

Ἔτι δὲ κἀκεῖνο ῥητέον, ἀδιορίστως αὐτῶν λεγόντων τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν, ὅτι ἀναιροῦσιν καὶ ἃ μὴ βούλονται. ἔστω γὰρ ἡ καταγραφὴ ἡ αὐτή. πότερον οὖν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Η ἐπιζεῦξαι εὐθεῖαν, ἢ οὐ δυνατόν; εἰ μὲν γὰρ ἀδύνατον, τῷ πέμπτῳ αἰτήματι προσαναιροῦσι καὶ

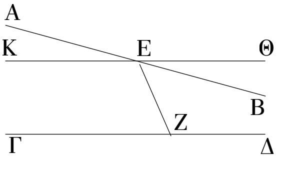


τὸ πρῶτον, τὸ *ἀπὸ παντὸς σημείου* λέγον ἐξεῖναι *ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἀγαγεῖν*. εἰ δὲ δυνατόν, ἐπεζεύχθω. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ΖΑΓ ΗΓΑ ἐλάσσους εἰσὶ δύο ὀρθῶν, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΗΑΓ ΗΓΑ πολλῷ μᾶλλον ἐλάσσους εἰσὶ τῶν δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα [p. 371] ΑΗ ΓΗ συμπεπτώκασι κατὰ τὸ Η ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἐκβεβλημέναι δύο ὀρθῶν. οὐκ ἄρα δυνατὸν λέγειν ἀδιορίστως τὰς ἀπ᾽ ἐλασσόνων δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν. ἀλλ᾽ ὅτι μέν τινες εὐθεῖαι συμπίπτουσιν ἀπ᾽ ἐλασσόνων δυεῖν ὀρθαῖν ἐκβληθεῖσαι δῆλον, εἰ καὶ πάσαις τοῦτο ζητεῖν ἔοικεν ὁ λόγος. εἴποι γὰρ ἄν τις ἀορίστου τῆς ἐλαττώσεως οὔσης τῶν δύο ὀρθῶν κατὰ μὲν τὴν τοσήνδε ἐλάττωσιν ἀσυμπτώτους μένειν τὰς εὐθείας, κατὰ δὲ ἄλλην τὴν ταύτης ἐλάσσονα συμπίπτειν.

Πρὸς[j] δὲ τὸν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἴδειν λεγέσθω παρ᾽ ἡμῶν ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον ᾧ καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον· ἐὰν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλωνται εὐθεῖαι γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ᾽ ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον μέγεθος ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν [τῶν][k] εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπείρων οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων ἄπειρον τὸ μεταξύ. πεπερασμένου γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον, ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους μεῖζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι. τούτου δὴ προϋποτεθέντος λέγω ὅτι, ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τέμνῃ[l] τις εὐθεῖα, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ καὶ τεμνέτω τὴν ΑΒ ἡ ΕΖΗ. λέγω ὅτι <καὶ>[m] τὴν ΓΔ τεμεῖ. ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαί [p. 372] εἰσιν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τοῦ Ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΖ ΖΗ, παντὸς μεγέθους μείζονα ἔχουσι[n] διάστασιν, ὥστε καὶ τούτου, ὅσον[o] ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων. ὅταν οὖν μεῖζον ἀλλήλων διαστῶσιν τῆς τούτων διαστάσεως τεμεῖ ἡ ΖΗ τὴν ΓΔ. ἐὰν ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις εὐθεῖα, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν.



Τούτου[p] προαποδειχθέντος ἀκολούθως δείξομεν τὸ προκείμενον. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ ΕΖ ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΒΕΖ ΔΖΕ.[q] λέγω ὅτι συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσους. ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ ΒΕΖ ΔΖΕ ἐλάσσους εἰσὶ δύο ὀρθῶν, τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ ΘΕΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΘΕ ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς ΚΘ ΓΔ ἐμπέπτωκεν ἡ ΕΖ καὶ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς ὑπὸ ΘΕΖ ΔΖΕ, παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ ΓΔ εὐθεῖαι. καὶ τέμνει τὴν ΚΘ ἡ ΑΒ· τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν ΓΔ διὰ τὸ προδεδειγμένον. συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΑΒ ΓΔ [p. 373] κατὰ τὰ μέρη ἐκεῖνα ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὥστε δέδεικται τὸ προκείμενον.



(a) ἴσας M Friedlein : γωνίας ἴσας ἀλλήλαις Eucl. codd. || (b) <καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς> Friedlein : καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς Eucl. P Campanus καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς Eucl. BFVbp Boet. (scil. recensio Theonis) || (c) συννεύειν scripsi : συνεύειν M Friedlein || (d) ὡς addidi (iam add. Morrow in translatione) || (e) λῆμμά τι ὃν scripsi : λημμάτιον M Friedlein || (f) καὶ deleui || (g) ἡ addidi || (h) μήποτε Luna : μή ποτε Friedlein || (i) οἴονται] οἷονται (?) Friedlein || (j) ad Πρὸς initium paragraphi statui : sine intermissione Friedlein || (k) τῶν del. Luna || (l) τέμνῃ Luna : τέμνει M Friedlein || (m) καὶ addidi || (n) ἔχουσι M Friedlein : an ἕξουσι legendum? || (o) τούτου, ὅσον M Friedlein : τοσούτου ὅσον coni. Luna || (p) ad Τούτου initium paragraphi statui : sine intermissione Friedlein || (q) ΔΖΕ Morrow (cf. infra, lin. 18) : ΔΕΖ M Friedlein.

[Proposizione] XXIX

La retta che cade su due rette parallele forma sia gli [*angoli*] *alterni uguali* [*fra loro*],[171] *sia l'angolo esterno <uguale> a quello interno, <opposto e dalla stessa parte, sia gli angoli interni>*[172] *e dalla stessa parte uguali a due retti.*

Questo teorema è l'inversa di entrambi i teoremi enunciati prima: infatti, trasforma in ipotesi quello che in ciascuno [di essi] era l'oggetto della ricerca e si propone di dimostrare ciò che in essi era dato [per ipotesi]. E bisogna ricordare anche questa differenza tra le inverse, cioè che ogni [teorema] inverso inverte, essendo uno, o un [teorema] soltanto, come il sesto [inverte] il quinto,[173] o, [pur essendo] uno, [ne inverte] di più, come quello che abbiamo davanti proprio adesso [inverte] i [due] che lo precedono. In questo teorema, l'autore degli *Elementi* ha usato per la prima volta quel postulato [che afferma che] *quando una retta, cadendo su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le rette, prolungandosi illimitatamente, si intersecano dalla parte in cui si trovano gli*

---

[171] I termini γωνίας e ἀλλήλαις, assenti nel lemma del commento di Proclo, sono invece presenti nel testo di Euclide (*Elem.* I, prop. 29, t. I, p. 41.7): τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ.

[172] È evidentemente necessaria un'integrazione in questo punto per risanare una lacuna prodottasi per omoteleuto (ἐντὸς… ἐντὸς, p. 364.3-5). In questo passo, però, la tradizione manoscritta di Euclide non è unitaria:

ἀπεναντίον ἴσην P Camp. : ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην Theon (BFVbp Boet.)

ἀπεναντίον ἴσην è la lezione di P (= *Vat. gr.* 190) e della traduzione latina di Campano da Novara (1270 *ca.*), ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην è la lezione dei mss. B (= Bodleian Library, *D'Orville* 301 [la segnatura data da Heiberg "Dorvillian. X,1 inf. 2,30" non è più attuale]), F (= *Laur. Plut.* 28, 3), V (= *Vindob. phil. gr.* 31 [la segnatura data da Heiberg "*Vindob. Gr.* 103" non è più attuale]), b (= Bologna, Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio, A 18-19) e p (= Paris, BnF, *grec* 2466) e di Boezio, *De Institutione arithmetica.* Il testo degli *Elementi* è stato rivisto da Teone di Alessandria (IV sec.) che ne fece un'edizione. Mentre il ms. P riflette il testo degli *Elementi* anteriore all'edizione di Teone, gli altri mss. discendono da un modello derivato dall'edizione di Teone. Quindi, nel nostro passo, Heiberg preferisce (naturalmente) la lezione di P. Dunque, poiché il lemma di Proclo presenta manifestamente un'omissione per omoteleuto, è impossibile sapere se Proclo leggesse il testo anteriore alla recensione di Teone oppure il testo della recensione di Teone. Per correggere questo passo (e tutti gli altri casi analoghi), bisognerebbe sapere quale testo di Euclide fosse utilizzato da Proclo. Secondo Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. XLVII, "Proclus, though later than Theon, frequently follows the older version". Friedlein (o la sua fonte) ha utilizzato un'edizione di Euclide fondata sui mss. della recensione di Teone (che è il testo corrente prima dell'edizione Heiberg).

[173] Dopo le prime quattro proposizioni, riguardo alle quali già gli antichi discutevano se fossero davvero proposizioni e non piuttosto una sorta di appendice dei postulati, Euclide presenta i due primi teoremi veri e propri nelle prop. 5 e 6. L'enunciato della prop. 5 è il seguente (*Elem.* I, prop. 5, t. I, p. 12.5-7): Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, "Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, essendo prolungati i lati uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro"; quello della prop. 6 è il seguente (*Elem.* I, prop. 6, t. I, p. 13.23-25): 'Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, "Se due angoli di un triangolo sono uguali tra loro, anche i lati sottesi agli angoli uguali saranno uguali tra loro". Le dimostrazioni che Euclide fornisce di queste due proposizioni, in sé elementari, presentano delle particolarità: infatti, non potendo adoperare la bisettrice (la cui costruzione è presentata nella prop. 9), dimostra la prop. 5 in modo piuttosto lungo e complicato; la dimostrazione della prop. 6, a sua volta, adopera per la prima volta il procedimento della riduzione all'assurdo. Al di là di queste considerazioni (su cui cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* [*supra*, n. 5], pp. 85-8, in part. n. 5), si noti che, come affermato da Proclo, la prop. 6 costituisce l'**inversa** della prop. 5: infatti, considerata la diretta (= prop. 5) "Se un triangolo ha due lati uguali [ipotesi], ha uguali anche i due angoli alla base [tesi]", l'inversa (= prop. 6) sarà "Se un triangolo ha due angoli uguali [tesi della prop. 5], ha uguali anche i lati opposti ai due angoli uguali [ipotesi della prop. 5]". L'inversa è sempre logicamente indipendente dalla diretta. Dunque, l'inversa, a differenza della contronominale, deve essere dimostrata separatamente dalla diretta (cf. *infra*, Appendice B, p. 81).

angoli minori di due retti. Commentando la parte che precede i teoremi,[174] abbiamo detto che non tutti sono d'accordo che esso sia generalmente accettato senza dimostrazione:[175] e infatti, come potrebbe essere tale [un teorema] la cui inversa è stata annoverata fra i teoremi in quanto dimostrabile? Infatti, il [teorema che dice che] *la* [*somma di*] *due angoli interni di ogni triangolo, comunque siano presi, è minore di due retti*[176] è l'inversa di questo postulato. E poi anche il fatto che le rette prolungandosi convergano sempre più [p. 365] non è una prova della [loro] intersezione[177] dal momento che si trovano anche altre linee che, pur convergendo sempre più, non si intersecano mai, come si è detto anche prima.[178]

Già anche alcuni altri [autori], classificandolo come teorema, hanno ritenuto degno di dimostrazione questo che è stato considerato <come> un postulato dall'autore degli *Elementi*. Anche Tolomeo sembra dimostrarlo nell'opera sull'intersezione delle [rette] che si prolungano a partire da [angoli] minori di due retti,[179] e fa la dimostrazione presupponendo molti dei teoremi già dimostrati fino a questo dall'autore degli *Elementi*. Supponiamo che siano tutti veri, per non aggiungere anche noi un impegno ulteriore, e che questo[180] sia dimostrato, come se fosse un lemma,[181] per mezzo di quanto è stato detto in precedenza. E anche questo è uno dei [teoremi] già dimostrati, cioè che le [rette] che si prolungano a partire da [angoli] uguali a due retti non si intersecano in nessun modo.[182] Dico, perciò, che è vera anche l'inversa, cioè che, essendo le rette parallele e tagliate da una retta [trasversale], gli angoli interni e dalla stessa parte sono uguali a due retti. Infatti, è necessario che la [retta] che taglia le parallele formi gli angoli interni e dalla stessa parte o uguali a due retti, o minori o maggiori di due retti. Perciò, siano AB e CD parallele e cada su di esse GF. Dico che [GF] non forma gli angoli interni e dalla stessa parte maggiori di due retti: infatti, se AFG e CGF

[174] Proclo fa riferimento al suo commento al quinto postulato, pp. 191.21-193.9 (cf. *supra*, pp. 35-7).

[175] Sul significato di ὁμολογούμενον, cf. *supra*, n. 138.

[176] Proclo cita l'enunciato della prop. 17.

[177] Morrow e Timpanaro Cardini ritengono che il passaggio logico sia un po' duro e sospettano la presenza di una lacuna. Morrow scrive: "ἐπεὶ καὶ is puzzling here. I suspect a lacuna in the text, the loss of a sentence (such as "Nor is it self-evident") which this clause was intended to support" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 285, n. 18). Timpanaro Cardini si limita a rimandare a questa nota di Morrow (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 290, n. 13). In realtà, in Proclo si trovano numerosi esempi di ἐπεὶ καὶ all'inizio del periodo senza che ci sia una principale. È un ἐπεὶ "indebolito" che aggiunge un'ulteriore causa. Quindi il testo non deve essere corretto, né è necessario ipotizzare una lacuna. Proclo ha detto che non tutti sono d'accordo che il quinto postulato sia universalmente ammesso senza dimostrazione. E dà due cause: (1) se la sua inversa è dimostrata, allora anche il quinto postulato deve essere dimostrabile; (2) non basta dire che le due rette convergono sempre di più per produrre l'assenso perché ci sono dei casi in cui due rette che convergono non si intersecano; dunque, per produrre l'assenso, è necessaria una dimostrazione.

[178] Cf. p. 177.13-21 (commento della definizione di parallele) e p. 192.18-24 (commento del quinto postulato).

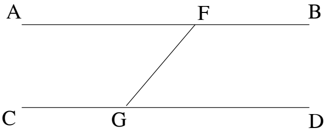
[179] Acerbi ritiene che questo sia proprio il titolo dell'opera di Tolomeo: "Proclo ci informa dell'esistenza di un suo scritto «le <rette> prolungate da meno di due retti incidono»" (Acerbi, *Euclide* [*supra*, n. 13], p. 252), ma Proclo sta verosimilmente riportando il contenuto dell'opera, non il titolo. L'opera di Tolomeo a cui Proclo si riferisce è il perduto *De rectis parallelis* (cf. *supra*, n. 21).

[180] Ovvero il quinto postulato.

[181] Sulla correzione di λημμάτιον in λῆμμά τι ὄν, cf. *infra*, § 9, pp. 73-4.

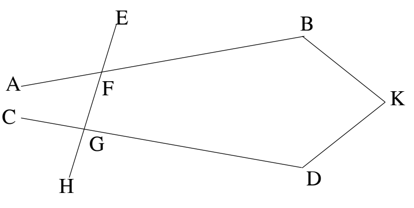
[182] Si tratta della prop. 28: se due rette tagliate da una trasversale formano gli angoli coniugati interni supplementari, esse sono parallele. È probabile che la dimostrazione cui qui si fa riferimento non sia quella di Euclide, ma quella di Tolomeo riportata da Proclo a pp. 362.14-363.18, che pur dà luogo a delle difficoltà (cf. *supra*, p. 59). Tolomeo, dimostrata la prop. 28 in modo diverso da Euclide, tenta ora di dimostrare la prop. 29 senza servirsi del quinto postulato, con l'intento di usare la prop. 29 proprio nella sua dimostrazione del quinto postulato.

fossero maggiori di due retti, [p. 366] i restanti BFG e DGF sarebbero minori di due retti; ma gli stessi [angoli] sarebbero sia maggiori di due retti – infatti, AF e CG non sono per nulla più parallele di FB e GD,[183] cosicché se la [retta] che cade su AF e CG forma gli [angoli] interni maggiori di due retti, anche quella che cade su FB e GD formerà gli [angoli] interni maggiori di due retti –, ma gli stessi [angoli] sono anche minori di due retti – infatti, i quattro [angoli] AFG, CGF, BFG, DGF sono uguali a quattro retti – il che è impossibile. In modo simile dimostreremo che <la> [retta] che cade sulle parallele non forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti. Ma se non [li] forma né maggiori né minori di due retti, resta che la [retta] che cade [sulle parallele] forma gli angoli interni e dalla stessa parte uguali a due retti.



Dopo aver fatto questa dimostrazione preliminare, l'[enunciato] in questione[184] si dimostra in modo incontrovertibile. Infatti, dico che *quando una retta, cadendo su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le rette, prolungandosi, si intersecheranno dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti*.[185] Infatti, supponiamo che non si intersechino; ma se sono asintotiche dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti, a molto più forte ragione saranno asintotiche dall'altra parte, dove si trovano gli [angoli] maggiori di due retti, cosicché le rette sarebbero asintotiche da entrambe le parti. Ma se è così, sono parallele. Ma è stato dimostrato che la [retta] che cade sulle parallele formerà gli angoli interni e dalla stessa parte uguali a due retti. [p. 367] Dunque, gli stessi [angoli] saranno sia uguali a due retti sia minori di due retti, il che è impossibile.

Avendo fatto questa dimostrazione preliminare ed essendo giunto al [teorema] in questione, Tolomeo vuole aggiungere qualcosa di più preciso e dimostrare che, quando una retta, cadendo su due rette, forma gli [angoli] interni e dalla stessa parte minori di due retti, non solo le rette non sono asintotiche, com'è stato dimostrato, ma anche che la loro intersezione avviene dalla parte in cui si trovano [gli angoli] minori di due retti, non da quella in cui [si trovano] gli [angoli] maggiori [di due retti]. Infatti, siano AB e CD due rette e, cadendo su di esse, la [retta] EFGH formi gli [angoli] AFG e CGF minori di due retti. Dunque, gli [angoli] restanti sono maggiori di due retti. Si è dunque dimostrato che le rette non sono asintotiche. Ma se si intersecano, si intersecheranno o dalla parte di A e C o da quella di B e D. Si intersechino dalla parte di B e D in K. Allora, poiché gli [angoli] AFG e CGF sono minori di due retti, e gli [angoli] AFG e BFG sono uguali a due retti,[186] tolto l'[angolo] AFG che è comune,[187] l'[angolo] CGF sarà minore di BFG. Dunque, l'angolo esterno del triangolo KFG[188] è minore di



[183] Sulla fallacia logica insita in quest'affermazione, cf. *infra*, p. 71.

[184] Cioè, naturalmente, il quinto postulato. Proclo continua a citare la dimostrazione di Tolomeo.

[185] Proclo cita, all'interno della dimostrazione di Tolomeo, l'enunciato del quinto postulato, pur con qualche variazione rispetto al lemma (p. 191.16-20).

[186] Perché angoli adiacenti, per la prop. 13.

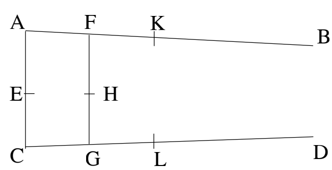
[187] *Scil.* alle due coppie di angoli.

[188] Come si è detto, è impossibile riprodurre graficamente le dimostrazioni per assurdo: nell'immagine, si con-

quello interno e opposto, il che è impossibile.[189] Dunque, non si intersecheranno da questa parte. Ma si intersecano. Dunque, la loro intersezione sarà dall'altra parte, cioè da quella in cui si trovano gli [angoli] minori di due retti.[190]

[p. 368] Questo è ciò [che dice] Tolomeo. È bene esaminare attentamente se per caso non ci sia un qualche paralogismo nelle ipotesi assunte, dico in quelle in cui diceva che, formando la retta che taglia le [rette] asintotiche[191] quattro angoli interni, quelli dalla stessa parte sono da entrambe le parti o uguali a due retti, oppure maggiori di due retti, oppure minori di due retti. Infatti, la divisione non è completa: infatti, nulla impedisce che chi dice che le rette prolungate a partire da [angoli] minori di due retti sono asintotiche dica che degli [angoli] dalla stessa parte gli uni sono maggiori di due retti, gli altri dall'altra parte minori di due retti, e non accolga riguardo ad essi un unico principio.[192] Poiché la divisione è incompleta, il [teorema] in questione non è stato dimostrato. È necessario dire ancora questo contro la dimostrazione, cioè che non dimostra che l'impossibilità è per sé. Infatti, non perché una retta tagliando delle parallele ha formato gli [angoli] dalla stessa parte maggiori oppure minori di due retti da entrambe le parti, allora per questo a queste ipotesi segue l'assurdo, ma perché i quattro [angoli] all'interno delle [rette] secate[193] sono uguali a quattro retti, per questo ciascuna di queste due ipotesi è assurda, poiché anche qualora qualcuno considerasse le rette non parallele, seguiranno le stesse conseguenze essendo state assunte le stesse ipotesi.

Con queste osservazioni contro Tolomeo, ci fermeremo qui, poiché la debolezza della [sua] dimostrazione risulta evidente da quanto si è detto.[194] Ora, suvvia, esaminiamo anche coloro che dicono che è impossibile che le [rette] che si prolungano a partire da [angoli] minori di [p. 369] due retti si intersechino. Infatti, prendendo due rette AB e CD e la [retta] AC che cade su di esse e forma gli [angoli] interni minori di due retti, pensano di dimostrare che AB e CD non si intersecano. Infatti, sia AC divisa a metà nel punto E e sia presa da AB la [retta] AF uguale a AE, e su CD la [retta] CG uguale a EC. Dunque, è evidente che AF e CG non si intersecheranno nel punto F [o] G:[195] infatti, se si intersecheranno, i due [lati] del triangolo saranno uguali ad AC, il che è impossibile.[196] Di nuovo, sia condotta FG e sia divisa a metà nel punto H e si prendano [rette] uguali.[197] Dunque, per lo stesso motivo non si intersecheranno neppure



siderino paradossalmente F, B e K allineati e così anche G, D e K: in questo modo si forma il triangolo KFG di cui CGF è un angolo esterno.

[189] Per la prop. 16 o "teorema dell'angolo esterno maggiore".

[190] Per un'analisi della struttura della dimostrazione di Tolomeo, cf. *infra*, p. 71.

[191] Cioè la retta che taglia le parallele.

[192] Cioè non si dice che gli angoli che costituiscono le due coppie sono o entrambi maggiori o entrambi minori di due retti.

[193] Cioè, ovviamente, delle parallele.

[194] Sulla confutazione del tentativo di dimostrazione di Tolomeo da parte di Proclo, cf. *infra*, p. 71.

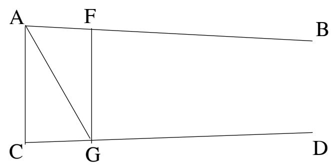
[195] Cioè F e G non possono coincidere.

[196] Per la prop. 20; cf. *Elem.* I, prop. 20, t. I, p. 28.9-10: Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι, "In un triangolo, la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente". In questo caso, se AB e CD si intersecassero nel punto F/G, si formerebbe il triangolo AFC/AGC in cui la somma di due lati, AF e CG, sarebbe uguale, non maggiore, del terzo, perché AF = AE, CG = CE e AE + EC = AC per ipotesi.

[197] L'espressione è molto ellittica: Proclo intende dire che, divisa anche FG nel punto H, si prendono i segmenti FK e GL su FB e GD tali che FK sia uguale a FH e GL a GH.

queste. E ripetendo questa operazione all'infinito, cioè congiungendo i punti asintotici[198] e tagliando a metà la congiungente e prendendo [rette] uguali alla metà di questa sulle rette, dicono di dimostrare che le rette AB e CD non si intersecano in nessun modo.

Dal momento che tali sono le affermazioni di questi [autori], noi dobbiamo dire che dicono sì una cosa vera, tuttavia non quanto pensano. Infatti, che non sia possibile determinare il punto dell'intersezione semplicemente [p. 370] in questo modo è vero; tuttavia, non è vero che esse non si intersecano affatto. Infatti, essendo determinati gli angoli BAC e DCA,[199] ammettiamo che AB e CD non si intersecano in F e in G; ma niente impedisce che si intersechino in K e in L,[200] anche qualora FK e GL fossero uguali a FH e HG. Infatti, intersecandosi AK e CL in K e L, gli angoli KFH e LGH non rimangono più gli stessi, ma qualcosa di FG viene a trovarsi all'esterno delle rette AK e CL, e così a loro volta le due [rette] FK e GL [diventano] maggiori della base di tanto quanto hanno preso dall'interno della retta FG.[201]



Ma, dato che essi dicono, in modo indiscriminato, che le rette che si prolungano a partire da [angoli] minori di due retti non si intersecano, bisogna dire anche che negano anche quello che non vogliono [negare]. Infatti, si prenda lo stesso disegno. È possibile o non è possibile tracciare una retta da A a G? Infatti, se è impossibile, eliminano insieme col quinto postulato anche il primo, quello che dice che è possibile condurre una retta da qualsiasi punto a qualsiasi punto; se invece è possibile, sia tracciata. Dal momento che FAC e GCA sono minori di due retti, è evidente che anche GAC e GCA sono ancor di più minori di due retti. Dunque, [p. 371] AG e CG, prolungate a partire da [angoli] minori di due retti, si sono intersecate in G. Dunque, non è possibile dire in modo indiscriminato che le [rette] che si prolungano a partire da [angoli] minori di due retti non si intersecano. Ma che alcune rette che sono state prolungate a partire da [angoli] minori di due retti si intersecano è chiaro, anche se il discorso[202] sembra ricercarlo per tutte. Infatti, qualcuno potrebbe dire che essendo indeterminata la diminuzione dei due retti, secondo una certa quantità di diminuzione le rette restano asintotiche, secondo un'altra [quantità] minore di questa si intersecano.

A chi cerca di vedere la prova di questo [postulato], diciamo che bisogna assumere l'assioma che anche Aristotele[203] ha utilizzato per provare che il cosmo è limitato: qualora

---

[198] In questo caso si intendono i punti che non coincidono.

[199] Non sono comprensibili né la traduzione di Morrow: "Let it be granted that AB and CD do not meet when angles BAC and DCA are defined by points F and G" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 290), né quella di Timpanaro Cardini: "Non s'incontrino pure le rette AB, CD nei punti F, G, che determinerebbero gli angoli BAC, DCA" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 295). Non sono, infatti, i punti F e G a determinare gli angoli BAC e DCA. La traduzione di Morrow è impossibile anche da un punto di vista linguistico perché κατὰ τὸ Ζ καὶ τὸ Η è senza alcun dubbio il complemento di συμπιπτέσωσαν, come ha visto Timpanaro Cardini, che però riprende da Morrow l'idea che i punti "determinano gli angoli". Credo, invece, che Proclo stia semplicemente premettendo che le rette AB e CD devono essere state congiunte mediante la retta AC, cioè devono essere già stati definiti gli angoli BAC e DCA, cosa che non segue necessariamente dal fatto che sono date due rette AB e CD: il participio perfetto ὡρισμένης indica che gli angoli devono essere già stati determinati, definiti, prima che inizi la dimostrazione.

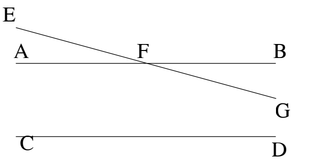
[200] Cioè, ovviamente, con K e L coincidenti.

[201] Sul tentativo (poco efficace) di Proclo di confutare queste affermazioni paradossali, cf. *infra*, pp. 71-2.

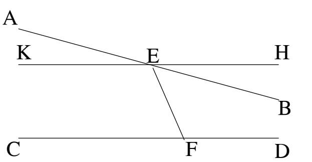
[202] Cioè il quinto postulato.

[203] Cf. Arist., *De Cael.*, I 5, 271 b 26-272 a 7 (cf. *infra*, p. 72).

si prolunghino illimitatamente da un unico punto due rette che formano un angolo, la distanza tra esse che si prolungano illimitatamente supera qualsiasi grandezza limitata. Egli ha dimostrato, infatti, che essendo illimitate le [rette] che si sono prolungate dal centro verso la circonferenza, è illimitato anche lo spazio intermedio. Infatti, se fosse limitato, sarebbe impossibile[204] aumentare la distanza, cosicché le rette non sarebbero illimitate. Prolungandosi illimitatamente, allora, le rette si distanzieranno l'una dall'altra più di qualsiasi grandezza limitata considerata. Prendendo preliminarmente questo come ipotesi, dico che se una retta taglia una delle rette parallele, taglierà anche l'altra. Infatti, siano AB e CD parallele e EFG tagli AB. Dico che taglierà <anche> CD. Infatti, poiché due rette, [p. 372] BF e FG, sono prolungate illimitatamente a partire dall'unico punto F, avranno distanza maggiore di qualsiasi grandezza, cosicché anche di questa [grandezza], cioè dello spazio intermedio tra le parallele. Allora, quando [BF e FG] saranno distanti tra loro più della distanza [delle parallele], FG taglierà CD. Dunque, se una retta taglia una delle parallele, taglierà anche l'altra.



Poiché ciò è stato dimostrato in precedenza, dimostreremo il [teorema] in questione in conseguenza. Infatti, siano AB e CD due rette e cada su di esse EF formando gli [angoli] BEF e DFE[205] minori di due retti. Dico che le rette si intersecheranno dalla parte in cui si trovano gli [angoli] minori di due retti. Infatti, poiché BEF e DFE sono minori di due retti, sia HEB uguale all'eccedenza dei due retti[206] e sia prolungata HE fino a K. Allora, dal momento che EF è caduta su KH e CD e forma gli [angoli] interni HEF e DFE uguali a due retti, le rette HK e CD sono parallele. E AB taglia KH; dunque taglierà anche CD a causa di ciò che è stato precedentemente dimostrato. Dunque, AB e CD si intersecheranno [p. 373] da quella parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti, cosicché il [teorema] in questione è stato dimostrato.



Per Proclo, il fatto che la prop. 17, cioè l'inversa del quinto postulato, sia dimostrabile rende impossibile pensare che il quinto postulato non lo sia.[207] Tuttavia, come si è già osservato, non c'è nessuna implicazione logica tra una proposizione e la sua inversa: il fatto che una delle due sia dimostrabile non implica che lo sia anche l'altra; essa, anzi, potrebbe persino essere falsa. È possibile dimostrare, per esempio, che se un numero è divisibile per otto, allora è pari, ma non è possibile dimostrare che se un numero è pari, allora è divisibile per otto, e ciò non nel senso in cui non è possibile *dimostrare* il quinto postulato, ma in quanto è evidentemente falso.

---

[204] Leggo con Friedlein e Timpanaro Cardini ἀδύνατον, lezione di M, contro il δυνατόν di Barozzi (*Procli Diadochi Lycii* [*supra*, n. 12], p. 223: *fieri potest*) accettato da Morrow (in traduzione e in nota: Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 291, n. 30). Proclo riporta fedelmente il ragionamento di Aristotele (cf. *infra*, p. 72) e il ragionamento è per assurdo: le rette sono state poste illimitate per ipotesi, ma se il cosmo fosse finito, la loro distanza non potrebbe aumentare illimitatamente ed esse non potrebbero essere illimitate. Se la distanza, però, fosse illimitata, il cosmo sarebbe illimitato. Ma se fosse illimitato, non potrebbe ruotare su se stesso perché ogni punto sarebbe illimitatamente distante dal successivo, dunque la distanza non sarebbe percorribile. Ma il cosmo ruota su se stesso, dunque è finito.

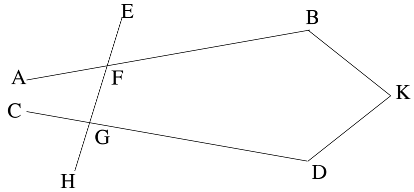
[205] È necessario correggere ΔΕΖ in ΔΖΕ, come già in Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. 292, n. 31.

[206] Cioè sia uguale alla differenza tra due retti e i due angoli, letteralmente l'"eccedenza" dei due retti.

[207] In base alla testimonianza di Proclo (pp. 183.22-184.5), questa era anche l'opinione di Gemino (su cui cf. *supra*, n. 18).

La prima dimostrazione citata è quella di Tolomeo. La principale fallacia logica della sua affermazione si annida nell'affermazione "AF e CG non sono per nulla più parallele di FB e GD". Infatti, per quanto quest'osservazione possa sembrare condivisibile, dire che AF e CG non sono più parallele di FB e GD implica che la parallela a una retta per un punto dato sia una e una sola. Benché questo possa sembrare ovvio, in realtà l'unicità della parallela per un punto è stabilita dall'assioma di Playfair, cioè da un equivalente del quinto postulato.[208] Ora, utilizzare l'equivalente di una proposizione all'interno della dimostrazione della proposizione stessa è evidentemente un circolo vizioso che inficia la validità dell'intera dimostrazione.

Anche l'affermazione secondo cui "se le rette sono asintotiche dalla parte in cui si trovano gli angoli minori di due retti, a molto più forte ragione saranno asintotiche dall'altra parte, dove si trovano gli angoli maggiori di due retti" non è, in realtà, banale e andrebbe dimostrata. Il fatto che Tolomeo stesso, pur avendola utilizzata come fosse evidente e incontrovertibile (p. 366.21-24), si premuri poi di dimostrare che due rette non asintotiche si intersecano dalla parte in cui si trovano i due angoli la cui somma è minore di due retti (p. 367.3-27) rende la struttura della dimostrazione molto disordinata,[209] tanto che Ian Mueller (*ap*. Morrow) esprime il sospetto che Proclo la riproduca in modo poco fedele; ma, a difesa della letteralità della citazione, Morrow sottolinea che il fatto che Proclo ripeta più volte λέγω (pp. 362.26, 365.16, 366.16) indica che sta citando Tolomeo in modo fedele nel corso dell'intera dimostrazione.[210] Considerato il disordine di questo tentativo di dimostrazione, si può tentare di ricostruire l'argomento nel modo seguente: data la figura qui accanto, le due rette non possono intersecarsi in K per la dimostrazione di p. 367.3-27. Però è stato dimostrato che se due rette tagliate da una trasversale formano gli angoli dalla stessa parte minori di due retti, non possono essere asintotiche (pp. 366.15-367.2); dunque, esse devono intersecarsi. Se non si intersecano dalla parte di K, si intersecheranno da quella di A e C, cioè dalla parte in cui si trovano i due angoli minori di due retti. Benché la fallacia logica di p. 366.2-3 resti, ciò permetterebbe di dare una struttura ordinata alla dimostrazione di Tolomeo, che nella forma in cui è riportata da Proclo anticipa e utilizza proprietà che dimostra solo dopo.



Proclo individua correttamente l'errore contenuto nella dimostrazione di Tolomeo: infatti, egli non è autorizzato ad assumere che, se le rette sono parallele, ciò che è vero per gli angoli da una parte dev'esserlo per quelli dall'altra, e che dunque possono essere o da entrambe le parti maggiori, o da entrambe le parti minori, o da entrambe le parti uguali a due retti, ma non da una parte maggiori e dall'altra minori. A questa obiezione, in realtà, Tolomeo aveva opposto l'affermazione che rette che si suppongono asintotiche, dunque parallele, non possono esserlo più da una parte che dall'altra. Come si è visto, però, quest'affermazione è fallace.

Riguardo all'affermazione paradossale di alcuni geometri anonimi, invece, Proclo non sembra cogliere la vera fallacia logica. Infatti, egli crede che la fallacia del ragionamento stia nel fatto che reiterando il procedimento i nuovi segmenti considerati "perdono qualcosa" rispetto

[208] Cf. *supra*, p. 20.

[209] Barozzi, nella sua traduzione del *Commento* di Proclo, commenta accanto alla dimostrazione che inizia a p. 365.22-23: *Flagitiosa Ptolemaei ratiocinatio* (Barozzi, *Procli Diadochi Lycii* [*supra*, n. 12], p. 220).

[210] Cf. Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. 288, n. 22.

a quelli iniziali. Tuttavia, data la premessa che FK e GL sono uguali rispettivamente a FH e HG, qualora si intersecassero in K ed L (coincidenti), si formerebbe di nuovo un triangolo con la somma di due lati uguale e non maggiore al terzo. La vera fallacia del ragionamento, che è di per sé molto elegante e richiama i celebri paradossi associati a Zenone di Elea, sta nel fatto che, proprio perché le rette a un certo punto si intersecano, non è possibile prendere all'infinito sulle due rette segmenti lunghi quanto la metà della congiungente. Si tratterebbe di un procedimento illimitato applicato a rette limitate. Tuttavia, quando Proclo dimostra che se quell'affermazione paradossale è vera, allora *almeno alcune* rette devono incontrarsi, sembra aprire una prospettiva molto interessante che avrebbe avuto risvolti importanti nella storia della matematica: infatti, l'idea che secondo una certa quantità di diminuzione rispetto ai due angoli retti le rette restano asintotiche, mentre secondo un'altra quantità minore di questa si intersecano sta alla base della geometria iperbolica, in cui dati una retta e un punto ad essa esterno esistono *almeno due* rette passanti per quel punto e parallele alla retta data.

Resta, infine, da analizzare il tentativo di dimostrazione di Proclo, che – come si è visto – non può non essere logicamente fallace. Proclo inizia richiamandosi a un "assioma aristotelico". Il riferimento è *De Cael.*, I 5, 271 b 26-272 a 7:

> Ὅτι μὲν τοίνυν ἀνάγκη τὸ σῶμα τὸ κύκλῳ φερόμενον πεπεράνθαι πᾶν, ἐκ τῶνδε δῆλον. Εἰ γὰρ ἄπειρον τὸ κύκλῳ φερόμενον σῶμα, ἄπειροι ἔσονται αἱ ἀπὸ τοῦ μέσου ἐκβαλλόμεναι. Τῶν δ' ἀπείρων τὸ διάστημα ἄπειρον· διάστημα δὲ λέγω τῶν γραμμῶν, οὗ μηδὲν ἔστιν ἔξω λαβεῖν μέγεθος ἁπτόμενον τῶν γραμμῶν. Τοῦτ' οὖν ἀνάγκη ἄπειρον εἶναι· τῶν γὰρ πεπερασμένων ἀεὶ ἔσται πεπερασμένον. Ἔτι δ' ἀεὶ ἔστι τοῦ δοθέντος μεῖζον λαβεῖν, ὥστε καθάπερ ἀριθμὸν λέγομεν ἄπειρον, ὅτι μέγιστος οὐκ ἔστιν, ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ τοῦ διαστήματος· εἰ οὖν τὸ μὲν ἄπειρον μὴ ἔστι διελθεῖν, ἀπείρου δ' ὄντος ἀνάγκη τὸ διάστημα ἄπειρον εἶναι, οὐκ ἂν ἐνδέχοιτο κινηθῆναι κύκλῳ· τὸν δ' οὐρανὸν ὁρῶμεν κύκλῳ στρεφόμενον, καὶ τῷ λόγῳ δὲ διωρίσαμεν ὅτι ἐστί τινος ἡ κύκλῳ κίνησις.

> Che sia necessario che il corpo che si muove circolarmente sia interamente limitato, è chiaro da quanto segue. Infatti, se il corpo che si muove circolarmente è illimitato, saranno illimitate le [linee] che si prolungano a partire dal [suo] centro. L'intervallo delle [linee] illimitate è illimitato: chiamo "intervallo delle linee" lo spazio al di là del quale non è possibile assumere una grandezza che tocchi le linee. È dunque necessario che esso sia illimitato: infatti, [l'intervallo] delle rette limitate sarà sempre limitato. Inoltre, è sempre possibile prendere una grandezza maggiore di quella data, cosicché, come diciamo il numero illimitato perché non ce n'è uno più grande, lo stesso ragionamento [vale] anche riguardo all'intervallo. Dunque, dal momento che, da una parte, non è possibile percorrere l'illimitato e, d'altra parte, è necessario, se il corpo è illimitato, che l'intervallo sia illimitato, non sarebbe possibile che [il corpo] si muova circolarmente; ma noi vediamo che il cielo compie una rivoluzione circolare, e con il ragionamento abbiamo determinato che c'è qualcosa cui appartiene il movimento circolare.

In realtà anche questo assioma aristotelico andrebbe dimostrato. Come non è possibile dire che due rette che si avvicinano sempre più si intersecheranno, così non è possibile dire che due rette che si allontanano sempre più alla fine saranno più distanti di qualsiasi grandezza finita data. Questo assioma, d'altronde, è caratteristico della geometria euclidea e non vale nella geometria ellittica, dove due rette che si allontanano sempre più alla fine possono anche ricongiungersi (come accade, per esempio, nella geometria sferica).

A partire da questo assioma, Proclo afferma che una retta che taglia una parallela deve necessariamente tagliare anche l'altra. Tuttavia, questo implica che per un punto possa passare una e una sola parallela a una retta data, il che, oltre a non valere nella geometria iperbolica, è anche un equivalente di quello stesso quinto postulato che sta cercando di dimostrare.[211] Dunque, con questi due presupposti, Proclo ha implicitamente ritagliato all'interno delle geometrie possibili proprio il caso della geometria euclidea; poiché, però, il quinto postulato è caratteristico proprio e solo di questa geometria, utilizzare un assioma che vale solo nella geometria euclidea per dimostrarlo è un circolo vizioso che inficia la validità della sua dimostrazione.

9. Nota testuale sul termine λημμάτιον *(p. 365.13)*

Leggendo il testo di Proclo nell'ed. Friedlein, a p. 365.9-14 Proclo dice che Tolomeo, nel suo tentativo di dimostrare il quinto postulato, ha dato per presupposti molti dei teoremi già dimostrati da Euclide fino alla prop. 28; poi aggiunge che anche lui li supporrà tutti quanti veri per non aggiungere un ulteriore impegno (infatti, come si è visto, non di tutte le proposizioni Proclo riporta la dimostrazione euclidea) e dimostrerà il quinto postulato per mezzo delle altre proposizioni suddette ὡς λημμάτιον. Quest'espressione ha generato numerose difficoltà.

Non è chiaro il senso della traduzione di Morrow: "let us assume that these are all true and take it *as a little lemma* that they have been proved by the previous arguments".[212] Infatti, in che senso il fatto che i teoremi devono essere considerati dimostrati per mezzo di quanto è stato detto in precedenza è un piccolo lemma? Un lemma è una proposizione da dimostrare, non un'aggiunta o una precisazione. Non è chiaro, poi, come si possa interpretare in questo modo la frase καὶ ὡς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων (p. 365.13-14).

Più vicina al testo greco, invece, è la traduzione latina cinquecentesca di Barozzi: "et supponatur omnia esse vera (ne nos quoque aliam superaddamus confusionem) hocque *veluti Sumptiunculam* ex iam dictis ostendi".[213] Simili a questa sono le traduzioni di Timpanaro Cardini, "che questo postulato sia *come un piccolo lemm*a, e sia stato dimostrato mediante le prove già dette",[214] e di Acerbi "e che questo sia dimostrato *a mò* (sic!) *di lemmino* per mezzo di ciò che è stato detto prima".[215]

Resta da comprendere, però, in che modo il quinto postulato possa essere considerato un λημμάτιον, un "piccolo lemma". Come si può chiamare "piccolo lemma" il quinto postulato? Se anche fosse possibile dimostrarlo (e fosse, dunque, un λῆμμα), anche in tal caso sarebbe una delle proposizioni più importanti della geometria, non un λημμάτιον ausiliare. Il senso di λῆμμα è spiegato da Proclo, *In Eucl.*, p. 211.1-12:

> Τὸ μὲν οὖν λῆμμα πολλάκις καὶ κατὰ πάσης προτάσεως εἰς κατασκευὴν ἄλλου λαμβανομένης κατηγοροῦσιν, ἐκ τοσῶνδε λημμάτων αὐτοῖς τὴν ἀπόδειξιν γεγονέναι φάσκοντες. **ἰδίως δὲ τὸ ἐν τοῖς γεωμετρουμένοις λῆμμα πρότασίς ἐστι δεομένη πίστεως.** ὅταν γὰρ ἢ περὶ τὴν κατασκευὴν ἢ περὶ τὴν ἀπόδειξιν λάβωμέν τι τῶν μὴ δεδειγμένων ἀλλὰ λόγου δεομένων, τότε τὸ ληφθὲν ὡς ἀμφίβολον καθ' αὐτὸ ζητήσεως ἀξιώσαντες λῆμμα αὐτὸ προσαγορεύομεν

[211] Come si è visto (*supra*, p. 20), questo enunciato è conosciuto come "assioma di Playfair".
[212] Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. 285.
[213] Barozzi, *Procli Diadochi Lycii* (*supra*, n. 12), p. 219.
[214] Timpanaro Cardini, *Commento* (*supra*, n. 12), p. 291.
[215] Acerbi, *Euclide* (*supra*, n. 13), p. 254.

τοῦ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος διαφέρον τῷ ἀποδεικτὸν ὑπάρχειν, ἐκείνων ἄνευ ἀποδείξεως εἰς πίστιν ἄλλων αὐτόθεν παραλαμβανομένων.

Spesso usano il [termine] "lemma" anche per designare ogni enunciato assunto per stabilirne un altro, dicendo di aver fatto la dimostrazione utilizzando un certo numero di lemmi. **In senso proprio, però, il lemma in geometria è un enunciato che richiede conferma.** Infatti, quando per una costruzione o per una dimostrazione assumiamo una delle cose che non sono state dimostrate, ma che richiedono un ragionamento, allora ritenendo che ciò che è stato assunto è degno di ricerca in quanto di per sé dubbio, lo chiamiamo "lemma", **ed esso differisce dal postulato e dall'assioma perché è dimostrabile, mentre quelli vengono assunti immediatamente senza dimostrazione per confermare altri [enunciati].**

Proclo usa λημμάτιον una sola volta, sempre nell'*In Eucl.*, per indicare appunto "un piccolo lemma": discutendo la prop. 19, Proclo sostiene che si potrebbe dimostrare in modo diverso da come è stata dimostrata da Euclide, dimostrando prima "un piccolo lemma" (προαποδείξαντες λημμάτιόν τι τοιοῦτον, p. 319.3-4). Nella stessa accezione il termine λημμάτιον è utilizzato nell'unica occorrenza che si trova negli *Elementi*: dopo aver dimostrato un gruppo di proposizioni riguardanti le rette irrazionali (lib. X, prop. 33-41), Euclide conclude la loro trattazione con un λῆμμα generale (*Elem.* X, prop. 41, t. III, p. 67.14-16): Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν **ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον**, "Che le [rette] irrazionali di cui si è detto si dividano in un solo modo nelle rette di cui sono la somma, le quali producono le figure in questione, lo dimostreremo **avendo premesso questo piccolo lemma**". L'esame delle altre occorrenze del termine in autori di opere matematiche (ad esempio, Tolomeo, Pappo e soprattutto Teone) permette, mi sembra, di affermare che esse si riferiscono sempre ad un piccolo lemma ausiliare che viene dimostrato all'interno di una dimostrazione più ampia come premessa alla continuazione di quest'ultima. Nulla di più lontano dal fondamentale quinto postulato.

Fatte queste premesse, propongo di correggere καὶ **ὡς λημμάτιον** τοῦτο δείκνυσθαι (p. 365.13-14) in καὶ **ὡς λῆμμά τι ὂν** τοῦτο δείκνυσθαι. In base alla definizione di λῆμμα di p. 211.1-12, Proclo direbbe dunque che non solo bisogna dare per presupposte tutte le dimostrazioni già fatte, ma anche prendere l'enunciato del quinto postulato "come se fosse un lemma", cioè come se potesse essere dimostrato e non più, dunque, come un postulato. Questa premessa di carattere teorico e definitorio è assolutamente necessaria per poter avviare la dimostrazione dell'enunciato: se si continuasse a considerarlo un postulato, cercare di dimostrarlo sarebbe assurdo per definizione. Bisogna dunque chiarire esplicitamente che non si tratta di un postulato, ma di un lemma. Il problema terminologico è avvertito, nella matematica antica, in modo ben più profondo che in quella moderna. Come si è già notato,[216] commentando il quinto postulato Proclo dice che bisogna cercare un'ἀπόδειξιν [...] τοῦ προκειμένου **θεωρήματος** (p. 193.1-2) e non τοῦ προκειμένου **αἰτήματος**: per la natura stessa dei postulati, proporsi di cercare la dimostrazione di un postulato è una *contradictio in terminis* pari al proporsi di cercare gli angoli di una circonferenza. Per la stessa ragione, prima di iniziare a discutere i tentativi di dimostrazione del quinto postulato, Proclo avverte la necessità di premettere che il quinto postulato sarà considerato "come se fosse un lemma". Senza questa precisazione terminologica preliminare, il tentativo di dimostrare l'enunciato non avrebbe potuto avere inizio.

---

[216] Cf. *supra*, n. 90.

Appendice A

La distinzione tra assiomi e postulati

Proclo, *In Eucl.*, pp. 75.27-77.6

Πρῶτον μὲν οὖν, ὅπερ[(a)] ἔφην, ἔδει διαστείλασθαι [p. 76] τάς τε ἀρχὰς καὶ τὰ ἑπόμενα ταῖς ἀρχαῖς, ὃ δὴ καὶ ποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καθ᾽ ἕκαστον ὡς εἰπεῖν βιβλίον καὶ πρὸ πάσης τῆς πραγματείας τὰς κοινὰς τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀρχὰς ἐκτιθέμενος. ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἴς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα. Διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων καὶ οὐκ ἔστιν ταὐτὸ ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥς πού φησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης, ἀλλ᾽ ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ καὶ καθ᾽ αὑτὸ πιστὸν τὸ παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον τὸ *τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι*. ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσίς ἐστι. Τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοιόνδε[(b)] κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως, ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδείξεως χωρίς. ὅταν δὲ αὖ καὶ ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα, φησίν, αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ *πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι*. Δηλοῦσι δὲ οἱ περί τινος τῶν αἰτημάτων καταπραγματεύσασθαι σπουδάσαντες, ὡς ὑπὸ μηδενὸς αὐτόθεν συγχωρεῖσθαι δυναμένου. Καὶ κατὰ μὲν τὴν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοῦτον [p. 77] διώρισται τὸν τρόπον ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις. Πολλάκις δὲ καὶ πάντα ταῦτα καλοῦσιν ὑποθέσεις, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἀξίωμα πᾶσαν ἀπόφανσιν ἁπλῆν, ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ ὑποθέσεις ἀξιώματα, κατὰ δὲ τοὺς ἑτέρους καὶ τὰ ἀξιώματα ὑποθέσεις.

(a) ὅπερ Segonds uel ὥσπερ Luna : ἅπερ M Friedlein || (b) τοιόνδε Segonds : τοῖον M Friedlein.

Innanzitutto, come ho detto, era necessario distinguere [p. 76] i principi e le conseguenze dei principi, cosa che appunto Euclide fa quasi in ogni libro ponendo anche prima di tutta la trattazione i principi comuni di questa scienza. In seguito, divide anche questi stessi principi comuni in ipotesi, postulati e assiomi.[217] Infatti, tutte queste cose differiscono l'una dall'altra e non sono la stessa cosa l'assioma, il postulato e l'ipotesi, come dice da qualche parte il geniale Aristotele,[218] ma quando una proposizione ammessa nel novero dei principi è [al contempo] nota al discente e credibile di per sé, essa sarà un assioma, per esempio la proposizione "*cose uguali a una stessa cosa sono uguali tra loro*".[219] Quando invece chi ascolta non ha una nozione autoevidente della cosa detta, ma la pone comunque e concorda con chi la assume, questa è un'ipotesi. Infatti, che il cerchio sia una figura di un certo tipo non l'abbiamo assunto preliminarmente per nozione comune senza che ci venisse insegnato, ma una volta sentito concordiamo senza dimostrazione. Infine, quando, [benché] una proposizione sia ignota e il discente non concordi, la si assume comunque, allora, dice Euclide, la chiamiamo postulato, per esempio la proposizione che *tutti gli angoli retti sono uguali tra loro*.[220] Lo dimostrano coloro che si sono sforzati di fornire una trattazione di uno dei

---

[217] La terminologia usata da Proclo è differente da quella euclidea: Proclo distingue le κοιναὶ ἀρχαί della geometria in ὑποθέσεις, αἰτήματα e ἀξιώματα; Euclide, rispettivamente, in ὅροι, αἰτήματα e κοιναὶ ἔννοιαι. La stessa distinzione si trova a p. 178.1-8 (cf. *infra*, pp. 76-7).

[218] Arist., *Anal. Post.* I 10, 76 a 31-77 a 4 (cf. *infra*, n. 235 e 236). Sulle differenze tra la divisione di Aristotele e l'interpretazione che ne dà Proclo, cf. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (*supra*, n. 24), p. 122.

[219] Cf. Euclide, *Elem.* I, comm. a. conc. 1, t. I, p. 5.9.

[220] *Elem.* I, post. 4, t. I, p. 5.3; sul quarto postulato, cf. *supra*, n. 15.

postulati, in quanto esso non può essere concesso immediatamente da nessuno.[221] E in questo modo, secondo la spiegazione di Aristotele, [p. 77] si distinguono l'assioma, il postulato e l'ipotesi. Spesso, però, tutte queste cose vengono anche chiamate ipotesi, come gli Stoici chiamano assioma ogni affermazione semplice, cosicché secondo questi ultimi anche le ipotesi sono assiomi, secondo i primi anche gli assiomi sono ipotesi.

Proclo, *In Eucl.*, pp. 178.1-179.22, 181.4-182.20

Τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν τριχῇ διῃρημένων εἴς τε ὑποθέσεις καὶ αἰτήματα καὶ ἀξιώματα, τὴν μὲν πρὸς ἀλλήλας τούτων διαφορὰν ἐν τοῖς πρόσθεν γεγραμμένοις παραδεδώκαμεν· περὶ δὲ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος ἰδίᾳ προκείσθω νυνὶ διελθεῖν ἀκριβέστερον, ἅτε δὴ καὶ περὶ αὐτῶν ἡμῖν ὄντος ἐνταῦθα τοῦ λόγου προηγουμένως· τὰς γὰρ ὑποθέσεις καὶ τοὺς καλουμένους ὅρους ἐν τοῖς προειρημένοις ἐσκέμμεθα.

Κοινὸν μὲν οὖν ἐστι τοῖς τε ἀξιώμασι καὶ τοῖς αἰτήμασι τὸ μὴ προσδεῖσθαί τινος ἀποδείξεως μηδὲ γεωμετρικῶν πίστεων, ἀλλ' ὡς γνώριμα λαμβάνεσθαι καὶ ἀρχὰς ταῦτα γίγνεσθαι τῶν ἐφεξῆς. διέστηκεν δὲ ἀπ' ἀλλήλων ᾗ καὶ τὰ θεωρήματα τῶν προβλημάτων διώρισται. καθάπερ γὰρ ἐν μὲν τοῖς θεωρήμασι τὸ ἀκόλουθον ἰδεῖν καὶ γνῶναι τοῖς ὑποκειμένοις προτιθέμεθα, [p. 179] ἐν δὲ τοῖς προβλήμασι πορίσασθαι καὶ ποιῆσαί τι προσταττόμεθα, κατὰ ταὐτὰ[(a)] δὴ καὶ ἐν μὲν τοῖς ἀξιώμασι ταῦτα λαμβάνεται, ὅσα αὐτόθεν εἰς γνῶσίν ἐστι καταφανῆ καὶ πρόχειρα ταῖς ἀδιδάκτοις ἡμῶν ἐννοίαις, ἐν δὲ τοῖς αἰτήμασι ταῦτα ζητοῦμεν λαβεῖν, ὅσα ἐστὶν εὐπόριστα καὶ εὐμήχανα, τῆς διανοίας οὐ καμνούσης περὶ τὴν λῆψιν αὐτῶν, οὐδὲ ποικιλίας δεόμενα οὐδὲ κατασκευῆς. γνῶσις ἄρα ἐναργὴς καὶ ἀναπόδεικτος καὶ λῆψις ἀκατάσκευος διορίζουσι τά τε αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα, ὥσπερ καὶ γνῶσις ἀποδεικτικὴ καὶ λῆψις τῶν ζητουμένων μετὰ παρασκευῆς τὰ θεωρήματα τῶν προβλημάτων διέκρινεν. δεῖ γὰρ δὴ πανταχοῦ τὰς ἀρχὰς τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς διαφέρειν τῇ ἁπλότητι, τῷ ἀναποδείκτῳ, τῷ αὐτοπίστῳ. *καθόλου γάρ*, φησὶν ὁ Σπεύσιππος, *ὧν ἡ διάνοια τὴν θήραν ποιεῖται τὰ μὲν οὐδεμίαν ποικίλην ποιησαμένη διέξοδον προβάλλει καὶ προευτρεπίζει πρὸς τὴν μέλλουσαν ζήτησιν καὶ ἔχει τούτων ἐναργεστέραν ἐπαφὴν μᾶλλον ἢ τῶν ὁρατῶν ἡ ὄψις, τὰ δὲ ἐκ τοῦ εὐθέως αἱρεῖν*[(b)] *ἀδυνατοῦσα κατὰ μετάβασιν ἐπ' ἐκεῖνα διαβαίνουσα κατὰ τὸ ἀκόλουθον αὐτῶν ἐπιχειρεῖ ποιεῖσθαι τὴν θήραν*. […]

ἄμφω μὲν οὖν τὸ ἁπλοῦν ἔχειν δεῖ καὶ εὔληπτον, τό τε αἴτημα λέγω καὶ τὸ ἀξίωμα, ἀλλὰ τὸ μὲν αἴτημα προστάττει ἡμῖν μηχανήσασθαι καὶ πορίσασθαί τινα ὕλην εἰς συμπτώματος ἀπόδοσιν ἁπλῆν ἔχουσαν καὶ εὐπετῆ τὴν λῆψιν, τὸ δὲ ἀξίωμα συμβεβηκός τι καθ' αὑτὸ λέγει[(c)] γνώριμον αὐτόθεν τοῖς ἀκούουσιν, ὥσπερ καὶ τὸ θερμὸν εἶναι τὸ πῦρ ἢ ἄλλο τι τῶν περιφανεστάτων, ἐφ' ὧν τοὺς ἀποροῦντας ἢ αἰσθήσεως ἢ κολάσεως δεῖσθαι λέγομεν· ὥστε ὁμογενὲς μὲν τὸ αἴτημα τῷ ἀξιώματι, διαφέρον δὲ αὐτοῦ τὸν εἰρημένον τρόπον· ἑκάτερον γὰρ ἐστιν ἀρχὴ ἀναπόδεικτος, ἀλλὰ τὸ μὲν ὡδί, τὸ δὲ ἄλλως, καθάπερ εἴπομεν. Ἤδη δὲ οἱ μὲν πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης τοῦ α´ ἰσορρόπων[(d)] ἀρχόμενος· "*Αἰτούμεθα, φησί, τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν*", καίτοι τοῦτο μᾶλλον ἀξίωμα ἄν τις προσείποι. οἱ δὲ πάντα ἀξιώματα προσαγορεύουσιν, ὥσπερ δὴ καὶ θεωρήματα πάντα τὰ ἀποδείξεως δεόμενα· κατὰ τὴν αὐτὴν γὰρ ὡς ἔοικεν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν ἰδίων ἐπὶ τὰ κοινὰ μεταβεβήκασιν ὀνόματα. διέστηκεν [p. 182] δὲ ὅμως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος οὕτως καὶ αἴτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφότερα ἀναπόδεικτά ἐστι, καὶ τὸ μὲν ὡς εὐπόριστον λαμβάνεται, τὸ δὲ ὡς εὔγνωστον ὁμολογεῖται.

Γεμῖνος μὲν οὖν κατὰ τοῦτον τὸν λόγον τὰ αἰτήματα διαιρεῖ τῶν ἀξιωμάτων· ἄλλοι δ' ἂν φαῖεν ὅτι τὰ μὲν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ἐστιν ὕλης, τὰ δὲ κοινὰ πάσης τῆς περὶ τὸ ποσὸν καὶ πηλίκον θεωρίας. τὸ μὲν γὰρ *<πάσας>*[(e)] *τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι καὶ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν* ὁ γεωμέτρης οἶδεν, τὸ δὲ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι κοινή ἐστιν ἔννοια καὶ ὅ

[221] Abbastanza chiaro il riferimento al quinto postulato e ai tentativi di dimostrarlo.

τε ἀριθμητικὸς αὐτῇ χρῆται καὶ ἕκαστος τῶν ἐπιστημόνων ἐφαρμόζων τῇ ἑαυτοῦ ὕλῃ τὸ κοινόν. ὁ δὲ Ἀριστοτέλης, ὥς που καὶ πρότερον εἴπομεν, αἴτημά φησιν ἀποδεικτὸν ὂν καὶ μὴ συγχωρούμενον ὑπὸ τοῦ ἀκούοντος ὅμως <ὡς>[f] ἀρχὴν λαμβάνεσθαι, τὸ δὲ ἀξίωμα ἀναπόδεικτον ὑπάρχειν καθ' αὑτὸ καὶ πάντας ἂν ὁμολογῆσαι κατὰ διάθεσιν, εἰ καὶ λόγου ἕνεκά τινες διαμφισβητοῖεν πρὸς αὐτό.

(a) κατὰ ταὐτὰ Segonds ex Barocio (*eodem… modo*) : κατὰ ταῦτα M Friedlein || (b) αἱρεῖν Segonds : αἴρειν M Friedlein || (c) λέγει Morrow (p. 142, adn. 4) ex Barocio (*per se accidens dicit*) : λέγειν M Friedlein || (d) τοῦ α′ ἰσορρόπων Hultsch : τῶν ἀνισορροπιῶν M Friedlein || (e) πάσας add. Segonds || (f) ὡς add. Luna.

Essendo stati divisi i principi geometrici in tre: ipotesi, postulati e assiomi, abbiamo insegnato la loro differenza reciproca nella parte che precede;[222] proponiamoci ora di trattare in particolare con maggiore precisione del postulato e dell'assioma, dal momento che a questo punto il nostro discorso verte principalmente intorno ad essi; le ipotesi e le cosiddette definizioni, infatti, le abbiamo esaminate precedentemente.

È comune agli assiomi e ai postulati il fatto che essi non richiedano alcuna dimostrazione né prove geometriche, ma che siano assunti come noti e che diventino princìpi delle cose che vengono subito dopo. Differiscono, invece, gli uni dagli altri per lo stesso criterio per il quale i teoremi sono distinti dai problemi.[223] Come nei teoremi, infatti, ci proponiamo di vedere e conoscere ciò che consegue alle ipotesi, [p. 179] mentre nei problemi ci prefiggiamo di fornire e costruire qualcosa, allo stesso modo anche negli assiomi si assume quanto è immediatamente evidente alla conoscenza e alla portata delle nostre nozioni innate, mentre nei postulati cerchiamo di assumere quanto è facile da fornire e da costruire, senza che la mente si affatichi intorno alla sua assunzione, e che non richiede un'argomentazione complessa. Dunque, una conoscenza evidente e senza dimostrazione e un'assunzione senza costruzione distinguono i postulati dagli assiomi,[224] come una conoscenza dimostrata e un'assunzione delle cose cercate con una costruzione distinguevano i teoremi dai problemi. Bisogna, infatti, che i princìpi differiscano in ogni caso da ciò che viene dopo i princìpi per semplicità, per mancanza di dimostrazione e per autoevidenza. *In generale, infatti*, dice Speusippo,[225] *fra le cose di cui l'intelligenza va a caccia, alcune le propone*[226] *non facendo alcuna*

---

[222] Cf. pp. 75.27-77.6.

[223] Proclo fa qui riferimento a un passo del secondo prologo, pp. 77.7-81.23. La distinzione è la seguente: si definisce "problema" tutto ciò che comporta una costruzione, una sezione e, in generale, un'operazione su una figura; "teorema" ciò che semplicemente dimostra proprietà inerenti ad ogni figura. Per esempio, quando ci si propone di inscrivere un triangolo equilatero in una circonferenza, si enuncia un problema, dal momento che sarebbe possibile inscrivere anche un qualsiasi altro triangolo nella circonferenza e che non è una proprietà della circonferenza che tutti i triangoli in essa inscritti siano equilateri. Al contrario, sarebbe errato proporre come problema la costruzione di un triangolo rettangolo in una semicirconferenza, dal momento che tutti i triangoli in essa inscritti sono rettangoli, e ciò non è altro che un teorema. Proclo sottolinea, infine, che in Euclide si trovano tanto problemi quanto teoremi e che i primi sono conclusi con "cosa che si doveva fare" (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι), i secondi con "cosa che si doveva dimostrare" (ὅπερ ἔδει δεῖξαι).

[224] Si noti la costruzione chiastica della frase: ovviamente la prima definizione si riferisce agli assiomi, la seconda ai postulati.

[225] Il passo p. 179.8-22 costituisce il fr. 35 Isnardi Parente di Speusippo (Speusippo, *Frammenti*, ed., trad. e commento a c. di M. Isnardi Parente, Bibliopolis, Napoli, 1980; testo p. 82; trad. pp. 147-8; comm. pp. 246-50) = fr. 73 Tarán (L. Tarán, *Speusippus of Athens: A Critical Study with a Collection of the Related Texts and Commentary*, Brill, Leiden 1981; testo p. 167; comm. pp. 422-31 [il commento riguarda i fr. 72-74]. Tarán fa iniziare il frammento alla lin. 12).

[226] Il verbo usato da Speusippo, προβάλλω, è difficile da rendere: si tratta delle cose che l'intelligenza "lancia davanti a sé", che considera senza dimostrarle come base da cui partire per la ricerca, la "caccia", successiva. Isnardi Parente, nella sua traduzione del frammento di Speusippo, usa "premettere" (p. 147) e spiega che è uno dei termini che Speusippo utilizza in maniera innovativa rispetto a Platone, quasi anticipando usi aristotelici ed ellenistici: nel caso di προβάλλω, Speusippo restringe il senso del verbo da un valore genericamente conoscitivo come "proporre" all'operazione mentale che consiste nel porre qualcosa "quale presupposto preliminare per il successivo svolgimento del conoscere, come presupposto indispensabile per la conoscenza ulteriore" (p. 248).

spiegazione complessa e le prepara per la ricerca ulteriore e ha di esse una conoscenza per contatto più evidente di quella che la vista ha delle cose visibili, altre, invece, essendo incapace di coglierle direttamente, pervenendo ad esse attraverso passaggi successivi, tenta di andare a caccia di esse seguendo il loro ordine. [...]

È necessario, dunque, che entrambi siano semplici e facili da comprendere, dico il postulato e l'assioma, ma il postulato ci impone di costruire e di procurarci una qualche materia la cui apprensione sia semplice e facile in vista della spiegazione di un caso, mentre l'assioma enuncia una proprietà per sé conoscibile immediatamente dagli ascoltatori, come per esempio che il fuoco è caldo o una qualche altra delle cose più evidenti a proposito delle quali diciamo che chi dubita di esse manca di percezione sensibile o di correzione.[227] Ne segue che il postulato è congenere all'assioma, ma differisce da esso nel modo suddetto: ciascuno [dei due], infatti, è un principio indimostrabile, ma il primo in un modo e il secondo in un altro, come abbiamo detto.

Ora, però, alcuni ritengono corretto chiamarli tutti postulati, allo stesso modo in cui [ritengono giusto chiamare] problemi tutte le cose ricercate: anche Archimede, infatti, all'inizio del primo libro *Sugli equilibri*[228] dice: "*Postuliamo che pesi uguali a distanze uguali stiano in equilibrio*";[229] eppure qualcuno chiamerebbe quest'enunciato piuttosto un assioma.[230] Altri li chiamano tutti assiomi, come [chiamano] teoremi tutte le cose che richiedono una dimostrazione: secondo la stessa corrispondenza, infatti, come sembra, hanno trasferito i nomi dalle cose specifiche a quelle generali. [p. 182] Un postulato differisce da un assioma come un problema da un teorema, anche se entrambi sono indimostrabili, e il primo si assume in quanto facile da costruire, sul secondo si è d'accordo in quanto facile da conoscere.

Gemino, dunque, distingue secondo questo ragionamento i postulati dagli assiomi. Altri, però, direbbero che i primi sono propri della materia geometrica, i secondi sono comuni a tutta la teoria che riguarda la quantità e la grandezza. In effetti, che <*tutti*> *gli angoli retti siano uguali*[231] e che

---

[227] Proclo intende dire che chi negasse una cosa evidentemente percepibile con i sensi potrebbe farlo o perché manca di percezione sensibile o perché, pur avendola, nessuno l'ha rimproverato e stimolato a usarla.

[228] Accolgo, seguendo A. Segonds, la congettura di Hultsch, citata da Morrow, *A Commentary* (*supra*, n. 12), p. 142, n. 5 e Timpanaro Cardini, *Commento* (*supra*, n. 12), p. 156, n. 143, τοῦ α΄ ἰσορρόπων anziché τῶν ἀνισορρόπων. Il titolo completo del trattato ricostruito dall'*incipit* del primo libro dovrebbe essere Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, "Sugli equilibri dei piani, ovvero centri di gravità dei piani" (cf. *Opere di Archimede*, a c. di A. Frajese, UTET, Torino 1974, p. 394): l'opera, divisa in due libri, discute questioni di meccanica, di leve e, più in generale, di statica. Proclo cita l'inizio della prima proposizione del primo libro il cui testo completo è Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος (t. II, p. 80.2-5 Mugler), "Postuliamo che pesi uguali a distanze uguali stiano in equilibrio e che invece pesi uguali a distanze diseguali non stiano in equilibrio, ma s'inclinino verso il peso che sta a distanza maggiore". La citazione di Proclo ha senso in questo contesto se si considera che Archimede, premettendo Αἰτούμεθα, "Chiediamo [che sia ammesso]", alle prime sette proposizioni, non fa altro che renderle, appunto, αἰτήματα, cioè postulati. La natura dei postulati, dunque, è quella di proposizioni che non sono accettate immediatamente, ma devono essere richieste all'interlocutore e poi supposte per il prosieguo della trattazione.

[229] Cf. Archimede, *De planorum aequilibriis*, post. 1, t. II, p. 80.2-3 Mugler. In realtà Proclo cita il testo atticizzando le forme doriche (βάρη e μηκῶν invece di βάρεα e μακέων).

[230] Si noti che Archimede, nel trattato Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, "Sulla sfera e il cilindro", chiama ἀξιώματα espressioni come Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία (Arch., *De sphaera et cylindro*, I, post. 2, t. I, pp. 9.27-10.3 Mugler), "Chiamo concava dalla stessa parte una linea tale che, qualora si prendano due punti qualsiasi su di essa, i segmenti che uniscono i due punti o cadono tutti dalla stessa parte della retta, o alcuni dalla stessa parte della retta e altri su di essa [riferimento a mistilinee che abbiano eventuali parti rette] ma nessuno dall'altra parte". Noi (e probabilmente anche Proclo) tenderemmo a classificare espressioni di questo tipo più come definizioni che come assiomi.

[231] Proclo si riferisce al quarto postulato di Euclide (*Elem.* I, post. 4, t. I, p. 5.3). Sulle obiezioni mosse contro questo postulato e la controbiezione di Pappo sulla necessità di porre quest'enunciato fra i postulati nonostante la

ogni retta finita[232] *si prolunghi in linea retta*,[233] lo sa il geometra; invece, *che cose uguali a una stessa cosa siano uguali anche tra loro*[234] è una nozione comune e la utilizza sia il matematico che ogni [altro] studioso, adattando la nozione comune alla propria materia. Aristotele, poi, come abbiamo detto anche prima da qualche parte,[235] dice che un postulato, pur essendo dimostrabile[236] e pur non essendo ammesso dall'ascoltatore, comunque è preso <come>[237] principio, mentre l'assioma è indimostrabile di per sé e che tutti darebbero il loro assenso per disposizione,[238] anche se, per amore della discussione, alcuni lo contesterebbero.

---

sua apparente evidenza di veridicità, cf. *supra*, n. 15. La citazione del postulato omette, come sempre nel corso del testo, l'ἀλλήλαις euclideo. Dal momento che anche parte della tradizione diretta degli *Elementi* attesta il postulato senza il pronome reciproco (per es. il ms. V = *Vindob. phil. gr.* 31, XI-XII s.), bisogna pensare che anche Proclo leggesse un testo euclideo che presentava quest'omissione, dunque di certo molto antica.

[232] Il sintagma sarebbe, per la matematica moderna, ossimorico; si ricordi che per Euclide e Proclo tutte le rette sono infinite solo in potenza, mentre in atto coincidono tutte con dei segmenti più o meno lunghi.

[233] Citazione letterale del secondo postulato (cf. Euclide, *Elem.* I, post. 2, t. I, p. 4.16-17).

[234] Cf. Euclide, *Elem.* I, comm. a. conc. 1, t. I, p. 5.9.

[235] Proclo rimanda a p. 76.8 (cf. *supra*, pp. 75-6); il passo di Aristotele a cui fa cenno è ancora *Anal. Post*. I 10, 76 a 31-77 a 4 (cf. *supra*, n. 218 e *infra*, n. 236).

[236] Qui (p. 182.15) mi discosto (anche se con qualche perplessità) dalle traduzioni di Morrow: "maintains that a postulate is demonstrable and, even though not accepted by the learner, can still be taken as a starting-point" (Morrow, *A Commentary* [*supra*, n. 12], p. 143) e Timpanaro Cardini: "dice che *il postulato è dimostrabile*, e anche se non ammesso dal discente, tuttavia lo si può assumere come principio" (Timpanaro Cardini, *Commento* [*supra*, n. 12], p. 157) (corsivo mio). Mi sembra che una traduzione di questo tipo presupponga l'infinito εἶναι: αἴτημά φησιν ἀποδεικτὸν **εἶναι** καὶ μὴ συγχωρούμενον ὑπὸ τοῦ ἀκούοντος ὅμως <ὡς> ἀρχὴν λαμβάνεσθαι (per l'integrazione di ὡς, cf. *infra*, n. 237). Poiché il testo presenta ὂν (e non εἶναι), sembra più corretto subordinarlo a λαμβάνεσθαι con lo stesso senso concessivo di μὴ συγχωρούμενον ὑπὸ τοῦ ἀκούοντος. Anche da un punto di vista logico avrebbe senso sottolineare che Aristotele affermava che un postulato potesse essere preso come principio *benché fosse dimostrabile*: è infatti sulla dimostrabilità del quinto postulato che si basa tutto l'attacco di Proclo e degli altri commentatori. Effettivamente Aristotele dice (*Anal. Post.* I 10, 76 b 23-34): Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι' αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ, ἐπεὶ οὐδὲ συλλογισμός. ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ', ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, **ἂν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται.** καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· **ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ <u>ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν</u> λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας**, "Ciò che è necessario che sia per sé e che è necessario credere non è né un'ipotesi né un postulato. Infatti, la dimostrazione non è relativa al discorso esterno, ma a quello che è nell'anima, dato che non lo è neanche il sillogismo. È sempre possibile obiettare, infatti, contro il discorso esterno, mentre non è sempre [possibile farlo] contro il discorso interno. Dunque, quelle cose che, pur essendo dimostrabili, il maestro assume senza dimostrarle sono ipotesi, qualora assuma cose credute dall'allievo, e si tratta di un'ipotesi non in assoluto, ma relativa solo all'allievo; *sono, invece, postulati qualora il maestro le assuma senza che nell'allievo sia presente un'opinione su di esse, o addirittura sia presente l'opinione contraria*. E in ciò differiscono l'ipotesi e il postulato. *È un postulato, infatti, il contrario dell'opinione dell'allievo, oppure ciò che, <u>pur essendo dimostrabile</u>, il maestro assume e usa senza dimostrarlo*".

[237] L'integrazione di ὡς (C. Luna) restituisce la locuzione λαμβάνειν/λαμβάνεσθαι ὡς utilizzata da Procl., *In Alc.*, 336.28-337.2 Segonds: εἴτε ὡς ἐφετὸν λαμβάνοις τὸ ἀγαθόν, εἴτε ὡς ἐραστόν; *In Tim.* II, pp. 10.31-11.1 Diehl: τὸν οὐρανὸν ὡς πύριον λαμβάνοντες καὶ τὴν γῆν, ἐφ' ἧς βεβήκαμεν, ὡς μάλιστα γῆν. La locuzione è attestata in vari autori filosofici, cf. per es. Alex. Aphr., *In Met*., p. 207.33 Hayduck: εἰ τὸ ἀνωτάτω τις γένος ὡς ἀρχὴν λαμβάνει; *In Top.*, p. 503.15-16 Wallies: οἱ πλεῖστοι τῶν ὁριζομένων τι ὡς ἀρχὴν τὸν ὅρον λαμβάνουσιν; Them., *In Phys.*, p. 232.8-9 Schenkl: ὅτι σαυτῷ λαμβάνεις τοδὶ τὸ σημεῖον ὡς ἀρχὴν καὶ πάλιν ὡς πέρας; Simpl., *In Phys.*, p. 49.6 Diels: τοῦτο ὁ γεωμέτρης ὡς ἀρχὴν λαμβάνει οὐκ ἀποδεικνὺς αὐτήν (cf. anche pp. 53.22, 216.3, 1281.27). La successione ὅμως ὡς è frequente in tutta la letteratura greca (Proclo la usa in *In Remp.* II, p. 327.1) e spiega l'omissione di ὡς (aplografia).

[238] La locuzione κατὰ διάθεσιν deriva probabilmente da Arist., *Anal. Post.* I 16, 79 b 23-24, dove Aristotele distingue l'ignoranza κατ' ἀπόφασιν, cioè l'ignoranza come negazione, dall'ignoranza κατὰ διάθεσιν, cioè l'ignoranza come disposizione, frutto di un ragionamento errato. Pur essendo improbabile che Proclo facesse qui riferimento a questo passo, è certo una distinzione di questo tipo che ha in mente parlando di coloro che danno il proprio assenso κατὰ διάθεσιν.

Le varie posizioni riportate da Proclo riguardo alla distinzione tra postulati e assiomi si possono sintetizzare nello schema seguente:

	ἀξιώματα	αἰτήματα
[Gemino][239] (pp. 178.9-179.12, 181.4-15)	Non richiedono dimostrazioni né prove geometriche, sono assunti come noti e diventano princìpi delle cose che vengono subito dopo. Si assume quanto è immediatamente evidente alla conoscenza e alla portata delle nostre nozioni innate. Enunciano proprietà per sé conoscibili immediatamente dagli ascoltatori.	Non richiedono dimostrazioni né prove geometriche, sono assunti come noti e diventano princìpi delle cose che vengono subito dopo. Si assume ciò che è facile da fornire e da costruire, senza che la mente si affatichi intorno alla sua assunzione, e che non richiede un'argomentazione complessa. Impongono di costruire e procurare una materia la cui apprensione sia semplice e facile in vista della spiegazione di un caso.
Altri autori non identificati (tra cui Archimede?) (p. 181.16-21)		Tutti i princìpi.
Altri autori non identificati (p. 181.21-24)	Tutti i princìpi.	
Riassunto dell'opinione di Gemino (pp. 181.24-182.6)	Sono indimostrabili, si assumono in quanto facili da conoscere.	Sono indimostrabili, si assumono in quanto facili da costruire.
Altri autori (non identificati) (p. 182.6-14).	Sono indimostrabili e comuni a tutta la matematica.	Sono indimostrabili e propri solo della geometria.
Aristotele (p. 182.14-20).	Sono indimostrabili ma già noti al discente/ ascoltatore; dunque, sono assunti come veri per disposizione.	Sono dimostrabili e non sono ammessi dal discente/ascoltatore, ma vengono assunti comunque.

[239] Dopo aver presentato le due opinioni contrapposte secondo cui i princìpi sono tutti postulati (p. 181.16-21) o tutti assiomi (p. 181.21-24), Proclo riprende la distinzione che aveva presentato all'inizio (pp. 178.9-179.12) riassumendola in una sola frase (pp. 181.24-182.4); subito dopo, attribuisce questa distinzione a Gemino (p. 182.5-6). Anche in seguito, dopo aver presentato il modo di distinguere assiomi e postulati secondo la scienza di appartenenza (specifica per i postulati, limitati alla geometria, generale per gli assiomi, estesi a tutta la matematica; cf. p. 182.6-14) e la distinzione di Aristotele (p. 182.14-20), Proclo dirà che i modi di distinguere postulati e assiomi sono tre: le opinioni presentate a p. 181.16-24 non vengono considerate (e in effetti, considerando tutti i princìpi *o* come postulati *o* come assiomi, *non li distinguono*), mentre quella presentata all'inizio (pp. 178.9-179.12) non viene distinta da quella di pp. 181.24-182.6, l'unica esplicitamente attribuita a Gemino. È dunque evidente che tutta la prima distinzione tra postulati e assiomi (pp. 178.9-179.12) è da attribuire a Gemino; la distinzione di pp. 181.24-182.6, a lui esplicitamente attribuita, è chiaramente un riassunto della prima distinzione che viene ripresa dopo aver citato le due opinioni che non operano una vera e propria distinzione (p. 181.16-24), prima di passare alle altre due che invece distinguono postulati e assiomi (p. 182.6-20). Che la citazione di Gemino inizi già a p. 178.9 è stato stabilito da K. Tittel, *De Gemini Stoici studiis mathematicis quaestiones philologae*, Typis M. Hoffmanni, Leipzig 1895, p. 22.

Appendice B

I quadrati di proposizioni

Per ragioni di completezza espositiva, Euclide ama costruire dei "quadrilateri" di proposizioni costituiti dalla proposizione diretta, dall'inversa, dalla contraria e dalla contronominale, tutte legate tra loro da un vincolo logico particolare. La proposizione inversa è quella in cui dalla tesi della diretta segue la sua ipotesi, la contraria è quella in cui dalla negazione dell'ipotesi segue la negazione della tesi, la contronominale è quella in cui dalla negazione della tesi segue la negazione dell'ipotesi:

Diretta: $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{T}$
Inversa: $\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{I}$
Contraria: $\neg\mathrm{I} \longrightarrow \neg\mathrm{T}$
Contronominale: $\neg\mathrm{T} \longrightarrow \neg\mathrm{I}$

L'inversa e la contraria non sono logicamente implicate dalla diretta: data una diretta del tipo "se una figura è un quadrato, essa è un quadrilatero", essa non implica né "se una figura è un quadrilatero, essa è un quadrato", né "se una figura *non* è una quadrato, essa non è un quadrilatero". Pertanto, l'inversa e la contraria devono essere dimostrate indipendentemente dalla diretta e, soprattutto, la loro dimostrazione non ha nessuna implicazione riguardo alla diretta. L'osservazione di Proclo che il quinto postulato deve essere dimostrabile perché è possibile dimostrare la sua inversa (la prop. 17) non ha un fondamento logico.

La contronominale, invece, è sempre valida se è valida la diretta ed è *logicamente equivalente* ad essa: data una diretta del tipo "se una figura è un quadrato, essa è un quadrilatero", essa implica "se una figura non è un quadrilatero, essa non è un quadrato". È possibile dimostrare che la diretta e la contronominale si implicano a vicenda: da $\neg\mathrm{T}$ non può che seguire $\neg\mathrm{I}$; infatti, se da $\neg\mathrm{T}$ seguisse I ($\neg\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{I}$), poiché da I segue T ($\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{T}$), allora da $\neg\mathrm{T}$ seguirebbe T ($\neg\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}$), il che è impossibile.

Preso il quinto postulato come proposizione diretta, si ottiene lo schema seguente:

Diretta = postulato V: Se due rette, tagliate da una trasversale, hanno la somma degli angoli da una parte minore di due retti [ipotesi], esse si incontrano da quella parte [tesi].
Inversa = prop. 17: Se due rette si incontrano [tesi del postulato], venendo tagliate da una trasversale, la somma degli angoli dalla parte in cui si incontrano è minore di due retti [ipotesi del postulato].
Contraria = prop. 27 e 28: Se due rette, tagliate da una trasversale, *non formano* angoli minori di due retti da nessuna delle due parti [negazione dell'ipotesi del postulato], esse *non* si incontrano [negazione della tesi del postulato].
Contronominale = prop. 29: Se due rette non si incontrano [negazione della tesi del postulato], venendo tagliate da una trasversale, la somma degli angoli dalla stessa parte non è minore di due retti e in particolare è *equivalente* a due retti [negazione dell'ipotesi del postulato].

Un altro esempio di quadrilatero di proposizioni nel primo libro degli *Elementi* è quello costituito dalle prop. 4, 8, 24 e 25,[240] due criteri di congruenza e due di disuguaglianza tra

---

[240] Lo stesso Proclo commenta diffusamente l'evidente relazione logica tra queste quattro proposizioni all'inizio del suo commento alla prop. 24 (pp. 336.14-337.25).

triangoli. I tre criteri di congruenza tra due triangoli sono enunciati nelle prop. 4, 8 e 26, benché con un'inversione nell'ordine rispetto all'uso moderno. Infatti, la prop. 8 coincide con quello che è attualmente conosciuto come "terzo criterio", cioè il caso in cui i due triangoli hanno tutti e tre i lati uguali (la dimostrazione euclidea di questo criterio fa uso del movimento come la dimostrazione del primo, mentre nella geometria moderna il terzo criterio si dimostra per mezzo del secondo)[241] e la prop. 26 coincide con il "secondo criterio", cioè il caso in cui i due triangoli hanno uguali due angoli e il lato compreso. Tutti e tre i criteri, dunque, si trovano nella sezione di proposizioni 1-28, pertanto non fanno uso del quinto postulato e appartengono alla geometria assoluta; svincolare anche il secondo criterio dal quinto postulato è una delle conquiste della trattazione euclidea.[242] Le prop. 24 e 25, invece, esprimono dei criteri di disuguaglianza tra due triangoli: Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει (*Elem.* I, prop. 24, t. I, p. 33.12-15), "Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati rispettivamente, ma [uno] ha l'angolo compreso dalle [due] rette uguali maggiore dell'angolo [dell'altro], avranno anche [l'uno][243] la base maggiore della base [dell'altro]", e Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην (*Elem.* I, prop. 25, t. I, p. 35.2-5), "Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati rispettivamente, ma hanno la base [uno] maggiore della base [dell'altro], avranno anche [l'uno] l'angolo compreso dalle [due] rette uguali[244] maggiore dell'angolo [dell'altro]". Si può notare che ai tre criteri di congruenza corrispondono solo due criteri di disuguaglianza, e che anzi il terzo criterio di congruenza presentato, il cosiddetto "secondo criterio" (prop. 26), segue i due di disuguaglianza (prop. 24 e 25). Anche in questa scelta di disposizione apparentemente strana si può ravvisare una precisa ragione strutturale legata al fatto che le prop. 4, 8, 24 e 25 costituiscono un quadrato di proposizioni. Infatti, ammessa l'ipotesi comune dei due lati rispettivamente uguali ai due lati, presa la prop. 4 come **diretta** (se l'angolo compreso è uguale all'angolo compreso [ipotesi], anche il terzo lato è uguale al terzo lato [tesi]), la prop. 8 ne costituisce l'**inversa** (se il terzo lato è uguale al terzo lato [tesi della prop. 4], anche l'angolo compreso è uguale all'angolo compreso [ipotesi della prop. 4]), la prop. 24 la **contraria** (se l'angolo compreso **non** è uguale all'angolo compreso [negazione dell'ipotesi della prop. 4], anche il terzo lato **non** è uguale al terzo lato [negazione della tesi della prop. 4]) e la prop. 25 la **contronominale** (se il terzo lato **non** è uguale al terzo [negazione della tesi della prop. 4], anche l'angolo compreso non è uguale all'angolo compreso [negazione dell'ipotesi della prop. 4]).

Un altro quadrilatero presente nel libro I è quello costituito dalle prop. 5, 6, 18 e 19.[245] Considerata la ricorrenza di questa struttura e la sua importanza a livello logico, A. Frajese ha ragione di affermare che "Euclide ama porre in evidenza tale relazione tra quattro proposizioni, ed ama enunciare tutte e quattro le proposizioni anche quando per taluna di esse ciò non è strettamente necessario: ad esempio per la I, 17".[246]

---

[241] Cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 89, n. 7.
[242] Cf. *ibid*., p. 117-8, n. 22.
[243] *Scil.* quello con l'angolo maggiore.
[244] *Scil.* quello con la base maggiore.
[245] Cf. Frajese-Maccioni, *Gli Elementi di Euclide* (*supra*, n. 5), p. 116, n. 21.
[246] *Ibid*.